Ejemplos

1. Pruebe que $\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}x} = 1-\operatorname{sen}x$.

Solución

A	Se utiliza la identidad $\cos^2 x = 1-\operatorname{sen}^2 x$.	$\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}x} = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}x}$
B	Se factoriza el numerador usando el método de diferencia de cuadrados.	$\dfrac{1-\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}x} = \dfrac{(1-\operatorname{sen}x)(1+\operatorname{sen}x)}{1+\operatorname{sen}x}$
C	Se simplifica.	$\dfrac{(1-\operatorname{sen}x)\cancel{(1+\operatorname{sen}x)}}{\cancel{1+\operatorname{sen}x}} = 1-\operatorname{sen}x$
D	Se da la conclusión.	$\therefore \dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}x} = 1-\operatorname{sen}x$

2. Pruebe la identidad $\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}^2(a) - \operatorname{sen}^2(b)$.

Solución

A	Se aplican las identidades para el seno de la suma de dos cantidades y el seno de la diferencia de dos cantidades.	$\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b)$ $=\left[\operatorname{sen}(a)\cos(b)+\cos(a)\operatorname{sen}(b)\right]\left[\operatorname{sen}(a)\cos(b)-\cos(a)\operatorname{sen}(b)\right]$
B	Se resuelve el producto aplicando la fórmula de diferencia de cuadrados.	$=\left[\operatorname{sen}(a)\cos(b)+\cos(a)\operatorname{sen}(b)\right]\left[\operatorname{sen}(a)\cos(b)-\cos(a)\operatorname{sen}(b)\right]$ $=\operatorname{sen}^2(a)\cos^2(b)-\cos^2(a)\operatorname{sen}^2(b)$
C	Se aplica la identidad $\cos^2 x = 1-\operatorname{sen}^2 x$.	$=\operatorname{sen}^2(a)\cos^2(b)-\cos^2(a)\operatorname{sen}^2(b)$ $=\operatorname{sen}^2(a)\left[1-\operatorname{sen}^2(b)\right]-\left[1-\operatorname{sen}^2(a)\right]\operatorname{sen}^2(b)$

D	Se multiplica.	$= \text{sen}^2(a)\left[1-\text{sen}^2(b)\right]-\left[1-\text{sen}^2(a)\right]\text{sen}^2(b)$ $= \text{sen}^2(a)-\text{sen}^2(a)\text{sen}^2(b)-\text{sen}^2(b)+\text{sen}^2(a)\text{sen}^2(b)$
E	Se simplifica.	$= \text{sen}^2(a)\cancel{-\text{sen}^2(a)\text{sen}^2(b)}-\text{sen}^2(b)\cancel{+\text{sen}^2(a)\text{sen}^2(b)}$ $= \text{sen}^2(a)-\text{sen}^2(b)$
F	Se da la conclusión.	$\therefore\ \text{sen}(a+b)\text{sen}(a-b)=\text{sen}^2(a)-\text{sen}^2(b)$

3. Calcule el valor exacto de $\text{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

Solución

A	Se expresa el ángulo como una suma.	$\frac{13\pi}{12}=\frac{10\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)=\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$
B	Se aplica la identidad para el seno de la suma de dos cantidades y se calculan los valores conocidos.	$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$ $=\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ $=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
C	Se da respuesta al problema planteado.	$\text{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

4. Pruebe que $\cos(2x)=\cos^4 x-\text{sen}^4 x$.

Solución

A	Se aplica la identidad para el coseno del ángulo doble.	$\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
B	Se usa la identidad pitagórica.	$\cos^2 x - \text{sen}^2 x$ $= (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\cdot 1$ $= (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)$
C	Se resuelve el producto como una diferencia de cuadrados.	$= (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)$ $= \cos^4 x - \text{sen}^4 x$
D	Se da la conclusión.	$\therefore \cos(2x) = \cos^4 x - \text{sen}^4 x$

5. Pruebe que la función tangente es periódica con período π.

Solución

A	Se plantea la identidad que se debe probar.	$\tan(x+\pi) = \tan x$
B	Se aplica la identidad trigonométrica por cociente para tangente.	$\tan(x+\pi) = \dfrac{\text{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$
C	Se aplican las identidades para el seno y el coseno de la suma de dos cantidades.	$\dfrac{\text{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{\text{sen}x\cos\pi + \cos x\,\text{sen}\pi}{\cos x\cos\pi - \text{sen}x\,\text{sen}\pi}$
D	Se calculan los valores conocidos.	$\dfrac{\text{sen}x\cos\pi + \cos x\,\text{sen}\pi}{\cos x\cos\pi - \text{sen}x\,\text{sen}\pi}$ $= \dfrac{\text{sen}x\cdot -1 + \cos x\cdot 0}{\cos x\cdot -1 - \text{sen}x\cdot 0}$ $= \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$ $= \tan x$
E	Se da la conclusión.	$\Rightarrow \tan(x+\pi) = \tan x$ Por lo tanto, la función tangente es periódica con período π.

6. Pruebe que $\dfrac{1+\cot^2\theta}{\tan^2\theta}=\cot^2\theta\csc^2\theta$.

Solución

A	Se aplican las identidades por cociente para tangente y cotangente.	$\dfrac{1+\cot^2\theta}{\tan^2\theta}=\dfrac{1+\dfrac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}}{\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}$
B	Se simplifica la fracción.	$\dfrac{1+\dfrac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}}{\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}$ $=\dfrac{\dfrac{\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}}{\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}$ $=\dfrac{\cos^2\theta\left(\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta\right)}{\text{sen}^4\theta}$
C	Se aplica la identidad pitagórica.	$=\dfrac{\cos^2\theta\left(\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta\right)}{\text{sen}^4\theta}$ $=\dfrac{\cos^2\theta\cdot 1}{\text{sen}^4\theta}$ $=\dfrac{\cos^2\theta}{\text{sen}^4\theta}$
D	Se escribe la fracción como un producto.	$\dfrac{\cos^2\theta}{\text{sen}^4\theta}=\dfrac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\cdot\dfrac{1}{\text{sen}^2\theta}$
E	Se aplican las identidades por cociente para cotangente y cosecante.	$\dfrac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\cdot\dfrac{1}{\text{sen}^2\theta}=\cot^2\theta\csc^2\theta$
F	Se da la conclusión.	$\therefore\ \dfrac{1+\cot^2\theta}{\tan^2\theta}=\cot^2\theta\csc^2\theta$

Ejercicios

1. Pruebe que $\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta+\cot\theta}=\operatorname{sen}\theta$.

2. Asocie cada expresión trigonométrica con su resultado, escribiendo la letra correspondiente dentro del paréntesis.

A	$\operatorname{sen}(b)\cos(a-b)+\cos(b)\operatorname{sen}(a-b)$	( ) $\cos(a)$
B	$\cos(a+b)\cos(-b)-\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(-b)$	( ) $\operatorname{sen}(b)$
C	$\operatorname{sen}(a)\cos(b-a)+\cos(a)\operatorname{sen}(b-a)$	( ) $\cos(b)$
D	$\cos(b+a)\cos(a)+\operatorname{sen}(b+a)\operatorname{sen}(a)$	( ) $\operatorname{sen}(a)$

3. Compruebe la identidad trigonométrica $\dfrac{\cos x\tan x+\operatorname{sen}x}{\tan x}=2\cos x$.

4. Pruebe que $2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta$.

5. Compruebe que $2\left(1-\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha=1+\operatorname{sen}^2\alpha$.

6. Sabiendo que $\operatorname{sen}x=\dfrac{3}{5}$ y $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ calcule $\cot x$.

7. Compruebe la identidad trigonométrica $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)}-\tan x=0$.

Soluciones

1.

A	Se aplican las identidades por cociente.	$\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta+\cot\theta}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}}$
B	Se simplifica la fracción.	$\dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}}$ $=\dfrac{\dfrac{1}{\cancel{\cos\theta}}}{\dfrac{\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cancel{\cos\theta}\,\text{sen}\theta}}$ $=\dfrac{\text{sen}\theta}{\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta}$
D	Se aplica la identidad pitagórica.	$\dfrac{\text{sen}\theta}{\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta}$ $=\dfrac{\text{sen}\theta}{1}$ $=\text{sen}\theta$

2.

A	$\text{sen}(b)\cos(a-b)+\cos(b)\,\text{sen}(a-b)$ $=\text{sen}\left[b+(a-b)\right]$ $=\text{sen}(b+a-b)$ $=\text{sen}(a)$	$(B)\ \cos(a)$
B	$\cos(a+b)\cos(-b)-\text{sen}(a+b)\,\text{sen}(-b)$ $=\cos\left[(a+b)+-b\right]$ $=\cos(a+b-b)$ $=\cos(a)$	$(C)\ \text{sen}(b)$

C	$\operatorname{sen}(a)\cos(b-a)+\cos(a)\operatorname{sen}(b-a)$ $=\operatorname{sen}\left[a+(b-a)\right]$ $=\operatorname{sen}(a+b-a)$ $=\operatorname{sen}(b)$	(D) $\cos(b)$
D	$\cos(b+a)\cos(a)+\operatorname{sen}(b+a)\operatorname{sen}(a)$ $=\cos\left[(b+a)-a\right]$ $=\cos(b+a-a)$ $=\cos(b)$	(A) $\operatorname{sen}(a)$

3.

A	Se aplican la identidad por cociente para tangente.	$\dfrac{\cos x\tan x+\operatorname{sen}x}{\tan x}=\dfrac{\cos x\cdot\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\operatorname{sen}x}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}$
B	Se simplifica la fracción.	$\dfrac{\cancel{\cos x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cancel{\cos x}}+\operatorname{sen}x}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}$ $=\dfrac{\dfrac{2\cancel{\operatorname{sen}x}}{1}}{\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}x}}{\cos x}}$ $=2\cos x$

4.

A	Se aplican las identidades para el seno de la diferencia de dos cantidades y el coseno de la suma de dos	$2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ $=2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)$ $=2\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\right]$

	cantidades.	
B	Se realiza el producto.	$2\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)-\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$ $=2\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-2\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)-2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$
C	Se aplica la identidad del seno del ángulo doble.	$=2\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-2\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)-2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$ $=\text{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-\text{sen}\left(2\cdot\frac{\beta}{2}\right)\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\text{sen}\left(2\cdot\frac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\text{sen}\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$ $=\text{sen}\alpha\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-\text{sen}\beta\,\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\text{sen}\beta\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\text{sen}\alpha\,\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$
D	Se factoriza la expresión usando el método de agrupación de términos.	$\text{sen}\alpha\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-\text{sen}\beta\,\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\text{sen}\beta\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\text{sen}\alpha\,\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$ $=\text{sen}\alpha\left(\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)-\text{sen}\beta\left(\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$ $=(\text{sen}\alpha-\text{sen}\beta)\left(\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$
E	Se aplica la identidad pitagórica.	$(\text{sen}\alpha-\text{sen}\beta)\left(\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\text{sen}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$ $=(\text{sen}\alpha-\text{sen}\beta)\cdot 1$ $=\text{sen}\alpha-\text{sen}\beta$

5.

A	Se simplifica la expresión.	$2\left(1-\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha$ $=2-2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$ $=2-\cos^2\alpha$
B	Se aplica la identidad pitagórica.	$2-\cos^2\alpha$ $=2-\left(1-\text{sen}^2\alpha\right)$
D	Se simplifica la expresión.	$2-\left(1-\text{sen}^2\alpha\right)$ $=2-1+\text{sen}^2\alpha$ $=1+\text{sen}^2\alpha$

6.

A	Se aplica la identidad pitagórica y se resuelve la ecuación.	$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$ $\Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 x = 1$ $\Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$ $\Rightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5}$
B	Como el ángulo se ubica en el segundo cuadrante el coseno es negativo.	$\Rightarrow \cos x = \frac{-4}{5}$

7.

A	Se aplican las identidades para el ángulo doble de seno y coseno.	$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos(2x)} - \tan x$ $= \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{1+\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} - \tan x$
B	Se aplica la identidad pitagórica.	$\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{1+\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} - \tan x$ $= \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} - \tan x$ $= \frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} - \tan x$
D	Se simplifica la expresión.	$\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} - \tan x$ $= \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}x\,\cancel{\cos x}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}} x} - \tan x$ $= \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} - \tan x$

E	Se aplica la identidad por cociente para tangente.	$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \tan x$ $= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $= 0$