Ejemplos

1. Determine cuáles de las siguientes funciones tienen gráficas estrictamente decrecientes y positivas en el intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$:

a) $f(x) = \sec x$
b) $g(x) = \csc x$
c) $h(x) = \tan x$
d) $k(x) = \cot x$

Solución

A	Se analiza la función $f(x) = \sec x$.	En el intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ la función secante es estrictamente decreciente y negativa.
B	Se analiza la función $g(x) = \csc x$.	En el intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ la función cosecante es estrictamente creciente y negativa.
C	Se analiza la función $h(x) = \tan x$.	En el intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ la función tangente es estrictamente creciente y positiva.
D	Se analiza la función $k(x) = \cot x$.	En el intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ la función cotangente es estrictamente decreciente y positiva.
E	Se da respuesta al problema planteado.	De las funciones dadas solamente la gráfica de la función $k(x) = \cot x$ es estrictamente decreciente y positiva en el intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

2. Determine en cuáles de los siguientes intervalos la gráfica de la función $f(x) = \cot x$ es negativa:

a) $\left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[$

b) $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

c) $\left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[$

d) $\left[\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right[$

Solución

A	Se analiza el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[$.	En el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[$ se cumple $f(x) < 0$.
B	Se analiza el intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.	En el intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ se cumple $f(x) \geq 0$.
C	Se analiza el intervalo $\left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[$.	En el intervalo $\left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[$ se cumple $f(x) > 0$.
D	Se analiza el intervalo $\left[\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right[$.	En el intervalo $\left[\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right[$ se cumple $f(x) \leq 0$.
E	Se da respuesta al problema planteado.	De los intervalos dados gráfica de la función $f(x) = \cot x$ es negativa solamente en $\left]\frac{-\pi}{2}, 0\right[$.

3. Asocie cada función trigonométrica con un intervalo en el cual su gráfica es negativa y estrictamente decreciente, escribiendo la letra correspondiente dentro del paréntesis.

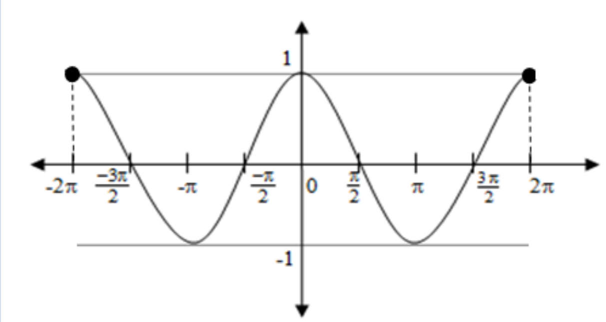
A	$\operatorname{sen} x$	( ) $\left]\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right]$
B	$-\operatorname{sen} x$	( ) $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
C	$\cot x$	( ) $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$
D	$\cos x$	( ) $\left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[$

Solución

A	$\operatorname{sen} x$	(D) $\left]\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right]$
B	$-\operatorname{sen} x$	(B) $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
C	$\cot x$	(C) $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$
D	$\cos x$	(A) $\left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[$

4. Para la función $\begin{array}{l} h : \left[-2\pi, 2\pi\right] \to \left[-1, 1\right] \\ h(x) = \cos x \end{array}$ determine los intervalos en los cuales se cumple $h(x) < 0$.

Solución

A	Se traza la gráfica de la función.	
B	Se analiza la gráfica para determinar los intervalos en los cuales la función es negativa.	$h(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$

5. **5.** Determine los puntos en los cuales la gráfica de la función tangente interseca el eje de las abscisas.

Solución

A	Se aplica la definición de la función tangente.	$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
B	La función corta el eje de las abscisas en todos los puntos de la forma $(x,0)$ es decir cuando $\tan x = 0$.	$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$ $\Rightarrow \operatorname{sen} x = 0$
C	Se buscan los valores correspondientes en el dominio de la función seno.	$\operatorname{sen} x = 0$ $\Rightarrow x \in \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
D	Se responde el problema planteado.	La gráfica de la función tangente interseca el eje de las abscisas en los puntos $(0, \pi + k\pi)$ tal que $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicios

1. Determine cuáles de las siguientes funciones tienen gráficas estrictamente decrecientes y negativas en el intervalo $\left]-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right[$:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$

b) $g(x) = \cos x$

c) $h(x) = \sec x$

d) $k(x) = \tan x$

2. Para la función $f(x) = \sec x$ determine en cuáles de los siguientes intervalos su gráfica cumple que $f(x) \leq -1$:

a) $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) $\left]\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right]$

c) $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

d) $\left[-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right[$

3. Si $\left(\frac{-3b}{4}, 0\right)$ es un punto de la gráfica de $f(x) = \cot x$ en el intervalo $\left]-8\pi, -7\pi\right[$, determine el valor de b.

4. Asocie cada afirmación sobre la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ con el valor que la completa correctamente, escribiendo la letra que corresponde en el paréntesis respectivo.

A	Corta el eje de ordenadas en el punto $(0,k) \Rightarrow k =$ _____	( ) $\frac{3\pi}{2}$
B	Pasa por el punto $(m,0) \Rightarrow m =$ _____	( ) $-\pi$

C	Es estrictamente creciente en el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, p\right[\Rightarrow p =$ _____	( ) -2π
D	Es negativa en el intervalo $\left]t, \frac{-\pi}{2}\right[\Rightarrow t =$ _____	( ) 1
E	Es estrictamente decreciente en el intervalo $\left[h, \frac{-3\pi}{2}\right[\Rightarrow h =$ _____	( ) 0

5. Determine en cuáles de los siguientes intervalos la gráfica de la función cosecante es positiva y estrictamente creciente:

a) $\left]\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right[$

b) $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

c) $\left]-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right[$

d) $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

Soluciones

1.

A	Se analiza la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.	En el intervalo $\left]-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right[$ la función seno es estrictamente creciente y positiva.
B	Se analiza la función $g(x) = \cos x$.	En el intervalo $\left]-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right[$ la función coseno es estrictamente decreciente y positiva.
C	Se analiza la función $h(x) = \sec x$.	En el intervalo $\left]-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right[$ la función secante es estrictamente creciente y positiva.
D	Se analiza la función $k(x) = \tan x$.	En el intervalo $\left]-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right[$ la función tangente es estrictamente creciente y positiva.
E	Se da respuesta al problema planteado.	De las funciones dadas no hay ninguna que sea estrictamente decreciente y negativa en el intervalo dado.

2.

A	Se analiza el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.	En este intervalo se tiene $f(x) \geq 1$.
B	Se analiza el intervalo $\left]\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right]$.	En este intervalo se tiene $f(x) \leq -1$.
C	Se analiza el intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.	En este intervalo se tiene $f(x) < -1$.
D	Se analiza el intervalo $\left[-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right[$.	En este intervalo se tiene $f(x) \geq 1$.

E	Se da respuesta al problema planteado.	De los intervalos dados se tiene $f(x) \leq -1$ en $\left]\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right]$ y $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

3.

A	Se aplica la definición de la función cotangente.	$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
B	Se buscan los puntos en los cuales $\cot x = 0$.	$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$ $\Rightarrow \cos x = 0$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad$ tal que $k \in \mathbb{Z}$
C	Se identifica cuál de estos valores se encuentra dentro del intervalo dado.	$\frac{-8\pi + -7\pi}{2} = \frac{-15\pi}{2}$
D	Se resuelve la ecuación para encontrar el valor de b.	$\frac{-15\pi}{2} = \frac{-3b}{4}$ $\Rightarrow \frac{-15\pi}{2} \cdot \frac{-4}{3} = b$ $\Rightarrow 10\pi = b$

4.

A	Corta el eje de ordenadas en el punto $(0,k) \Rightarrow k =$ _____	$(B)\ \frac{3\pi}{2}$
B	Pasa por el punto $(m,0) \Rightarrow m =$ _____	$(D) -\pi$
C	Es estrictamente creciente en el intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, p\right[\Rightarrow p =$ _____	$(E) -2\pi$
D	Es negativa en el intervalo $\left]t, \frac{-\pi}{2}\right[\Rightarrow t =$ _____	$(A)\ 1$

E	Es estrictamente decreciente en el intervalo $\left[h, \frac{-3\pi}{2}\right[\Rightarrow h = \_\_\_\_\_$	(C) 0

5.

A	Se analiza el intervalo $\left]\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right[$.	En este intervalo la función es estrictamente creciente y positiva.
B	Se analiza el intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.	En este intervalo la función es estrictamente creciente y positiva.
C	Se analiza el intervalo $\left]-2\pi, \frac{-3\pi}{2}\right[$.	En este intervalo la función es estrictamente decreciente y positiva.
D	Se analiza el intervalo $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.	En este intervalo la función es estrictamente decreciente y negativa.
E	Se da respuesta al problema planteado.	De los intervalos dados la gráfica de la función cosecante es estrictamente creciente y positiva en $\left]\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right[$ y $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.