ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplos

Encuentre el conjunto solución en el intervalo $\left[0,2\pi\right[$ para cada una de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1. $2\tan x = \sqrt{3} + \tan x$

Solución

A	Se despeja la tangente.	$2\tan x = \sqrt{3} + \tan x$ $\Rightarrow 2\tan x - \tan x = \sqrt{3}$ $\Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$
B	Como es positiva debe ubicarse en el los cuadrantes I o III.	$x = \frac{\pi}{3}$ $x = \frac{4\pi}{3}$
C	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

2. $\tan x = 2 - \tan x$.

Solución

A	Se despeja la tangente.	$\tan x = 2 - \tan x$ $\Rightarrow \tan x + \tan x = 2$ $\Rightarrow 2\tan x = 2$ $\Rightarrow \tan x = 1$
B	Se aplica la identidad por cociente para tangente.	$\tan x = 1$ $\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1$ $\Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x$

C	Si ambos son positivos se ubican en el I cuadrante y si ambos son negativos se ubican en el III cuadrante.	$x = \frac{\pi}{4}$ $x = \frac{5\pi}{4}$
D	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

3. $\cos x + 1 = 1$

Solución

A	Se despeja el coseno.	$\cos x + 1 = 1$ $\Rightarrow \cos x = 1 - 1$ $\Rightarrow \cos x = 0$
B	El coseno se hace 0 en los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.	$x = \frac{\pi}{2}$ $x = \frac{3\pi}{2}$
C	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

4. $\cos x = \sqrt{2} - \cos x$

Solución

A	Se despeja el coseno.	$\cos x = \sqrt{2} - \cos x$ $\Rightarrow \cos x + \cos x = \sqrt{2}$ $\Rightarrow 2\cos x = \sqrt{2}$ $\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
B	Como es positivo debe ubicarse en los cuadrantes I o IV.	$x = \frac{\pi}{4}$ $x = \frac{7\pi}{4}$

C	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

5. $2\text{sen}x = -1$

Solución

A	Se despeja el seno.	$2\text{sen}x = -1$ $\Rightarrow \text{sen}x = \frac{-1}{2}$
B	Como es negativo debe ubicarse en los cuadrantes III o IV.	$x = \frac{7\pi}{6}$ $x = \frac{11\pi}{6}$
C	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

6. $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$

Solución

A	Se despeja la tangente.	$\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$ $\Rightarrow \sqrt{3}\tan x = -1$ $\Rightarrow \tan x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$
B	Como es negativa debe ubicarse en los cuadrantes II o IV.	$x = \frac{5\pi}{6}$ $x = \frac{11\pi}{6}$
C	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

7. $3\csc x + 2 = \operatorname{sen} x$

Solución

A	Se aplica la identidad por cociente para el seno y se simplifica la expresión.	$3\csc x + 2 = \operatorname{sen} x$ $\Rightarrow 3\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} + 2 = \operatorname{sen} x$ $\Rightarrow \dfrac{3}{\operatorname{sen} x} + 2 = \operatorname{sen} x$ $\Rightarrow \dfrac{3 + 2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x$ $\Rightarrow 3 + 2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^2 x$
B	Se factoriza.	$3 + 2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^2 x$ $\Rightarrow 0 = \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 3$ $\Rightarrow 0 = (\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x - 3)$
C	Se busca dónde se hace 0 el primer factor.	$\operatorname{sen} x + 1 = 0$ $\Rightarrow \operatorname{sen} x = -1$ $\Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$
D	Se busca dónde se hace 0 el segundo factor.	$\operatorname{sen} x - 3 = 0$ $\Rightarrow \operatorname{sen} x = 3$ $\Rightarrow$ No tiene solución porque el ámbito de seno es $[-1,1]$
E	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\dfrac{3\pi}{2}\right\}$

8. $\left(\csc x + 2\right)\left(\operatorname{sen}^2 x - 1\right) = 0$

Solución

A	Se busca dónde se hace 0 el primer factor.	$\csc x + 2 = 0$ $\Rightarrow \csc x = -2$ $\Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = -2$ $\Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{-1}{2}$
B	Como es negativo debe ubicarse en los cuadrantes III o IV.	$x = \dfrac{7\pi}{6}$ $x = \dfrac{11\pi}{6}$
C	Se busca dónde se hace 0 el segundo factor.	$\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$ $\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1$ $\Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm 1$
D	Se buscan los valores usando la circunferencia trigonométrica.	$x = \dfrac{\pi}{2}$ $x = \dfrac{3\pi}{2}$
E	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{ \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{6} \right\}$

Ejercicios

Encuentre el conjunto solución en el intervalo $\left[0, 2\pi\right[$ para cada una de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1. $2 - \cos x = 3\cos x$

2. $\operatorname{sen} x + 1 = 1$

3. $2 + \sqrt{3}\tan\theta = 3$

4. $\operatorname{sen} x\left(2\cos x - 1\right) = 0$

5. $\sqrt{3} + \tan\theta = 2\left(\tan\theta + \sqrt{3}\right)$

6. $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}$

7. $\left(1 + \cos x\right)\left(1 - \cos x\right) = 1 - \cos x$

8. $2\operatorname{sen}^2 x = -3\cos x$

9. $4\operatorname{sen} x = \csc x$

Soluciones

1.

A	Se despeja el coseno.	$2-\cos x=3\cos x$ $\Rightarrow -\cos x-3\cos x=-2$ $\Rightarrow -4\cos x=-2$ $\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$
B	Se buscan los valores usando la circunferencia trigonométrica.	$x=0$ $x=2\pi$
C	Se da el conjunto solución.	$S=\{0,2\pi\}$

2.

A	Se despeja el seno.	$\operatorname{sen}x+1=1$ $\Rightarrow \operatorname{sen}x=0$
B	El seno se hace 0 en los múltiplos de π.	$x=0$ $x=\pi$
C	Se da el conjunto solución.	$S=\{0,\pi\}$

3.

A	Se despeja la tangente.	$2+\sqrt{3}\tan\theta=3$ $\Rightarrow \sqrt{3}\tan\theta=1$ $\Rightarrow \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$
B	Como es positiva debe ubicarse en los cuadrantes I o III.	$x=\frac{\pi}{6}$ $x=\frac{7\pi}{6}$
C	Se da el conjunto solución.	$S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$

4.

A	Se factoriza.	$2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}x$ $\Rightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x-\operatorname{sen}x=0$ $\Rightarrow \operatorname{sen}x\left(2\cos x-1\right)=0$
B	Se busca dónde se hace 0 el primer factor.	$\operatorname{sen}x=0$ $\Rightarrow x=0 \text{ o } x=\pi$
C	Se busca dónde se hace 0 el segundo factor.	$2\cos x-1=0$ $\Rightarrow 2\cos x=1$ $\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow x=\frac{\pi}{3} \text{ o } x=\frac{5\pi}{3}$
E	Se da el conjunto solución.	$S=\left\{0,\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}\right\}$

5.

A	Se despeja la tangente.	$\sqrt{3}+\tan\theta=2\left(\tan\theta+\sqrt{3}\right)$ $\Rightarrow \sqrt{3}+\tan\theta=2\tan\theta+2\sqrt{3}$ $\Rightarrow \tan\theta-2\tan\theta=2\sqrt{3}-\sqrt{3}$ $\Rightarrow -\tan\theta=\sqrt{3}$ $\Rightarrow \tan\theta=-\sqrt{3}$
B	Como es negativa debe ubicarse en los cuadrantes II o IV.	$x=\frac{2\pi}{3}$ $x=\frac{5\pi}{3}$
C	Se da el conjunto solución.	$S=\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

6.

A	Se aplica la identidad pitagórica y se despeja el seno.	$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow 1 = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{1}{2} = \operatorname{sen} x$
B	Como es positivo debe ubicarse en los cuadrantes II o III.	$x = \frac{\pi}{6}$ $x = \frac{5\pi}{6}$
C	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

7.

A	Se factoriza.	$(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1 - \cos x$ $\Rightarrow 1 - \cos^2 x = 1 - \cos x$ $\Rightarrow 1 - \cos^2 x - 1 + \cos x = 0$ $\Rightarrow \cos x(1 - \cos x) = 0$
B	Se busca dónde se hace 0 el primer factor.	$\cos x = 0$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ o } x = \frac{3\pi}{2}$
C	Se busca dónde se hace 0 el segundo factor.	$1 - \cos x = 0$ $\Rightarrow \cos x = 1$ $\Rightarrow x = 0$
D	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

8.

A	Se factoriza.	$2\text{sen}^2 x = -3\cos x$ $\Rightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right) = -3\cos x$ $\Rightarrow 2 - 2\cos^2 x = -3\cos x$ $\Rightarrow 0 = 2\cos^2 x - 3\cos x - 2$ $\Rightarrow 0 = \left(\cos x - 2\right)\left(2\cos x + 1\right)$
B	Se busca dónde se hace 0 el primer factor.	$\cos x - 2 = 0$ $\Rightarrow \cos x = 2$ $\Rightarrow$ No tiene solución porque el ámbito de coseno es $\left[-1,1\right]$
C	Se busca dónde se hace 0 el segundo factor.	$2\cos x + 1 = 0$ $\Rightarrow \cos x = \dfrac{-1}{2}$ $\Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ o $x = \dfrac{4\pi}{3}$
D	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

9.

A	Se despeja el seno.	$4\operatorname{sen}x = \csc x$ $\Rightarrow 4\operatorname{sen}x = \dfrac{1}{\operatorname{sen}x}$ $\Rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x = 1$ $\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow \operatorname{sen}x = \pm\dfrac{1}{2}$
B	Como puede ser negativo o positivo se ubica en cualquiera de los cuadrantes.	$x = \dfrac{\pi}{6}$ $x = \dfrac{5\pi}{6}$ $x = \dfrac{7\pi}{6}$ $x = \dfrac{11\pi}{6}$
C	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$