

CÁLCULO DE IMÁGENES Y PREIMÁGENES

Ejemplos

1. Si $g(x) = -\cot x$ calcule las preimágenes de $\frac{-1}{\sqrt{3}}$.

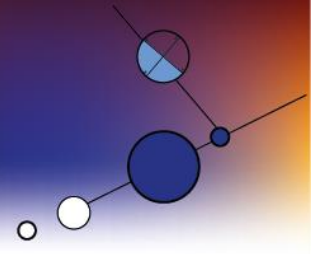
Solución

A	Se plantea la ecuación que se debe resolver para calcular las preimágenes.	$-\cot x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
B	Se establece el valor conocido que resuelve esta ecuación.	$\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
C	Se aplica la periodicidad de la función cotangente para encontrar todas las preimágenes.	$-\cot x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

2. Si $h(x) = \sec x$ calcule la imagen de $\frac{-53\pi}{6}$.

Solución

A	Se calcula el ángulo de referencia.	$\frac{-53\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 9\pi$ <p>Entonces el ángulo de referencia $\frac{\pi}{6}$.</p>
B	Se calcula la imagen del ángulo de referencia.	$\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$
C	Se calcula la imagen ubicando el cuadrante respectivo.	$\frac{-53\pi}{6}$ está ubicado en el III cuadrante, donde la función secante es negativa. $\Rightarrow \sec\left(\frac{-53\pi}{6}\right) = -\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2}{\sqrt{3}}$



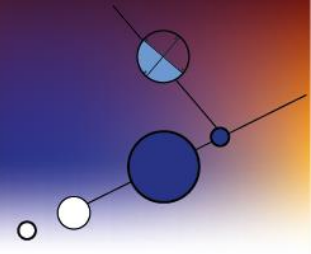
3. Calcule $\csc\left(\frac{39\pi}{4}\right)$.

Solución

A	Se busca un ángulo coterminoal.	$\frac{39\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 8\pi$ $\Rightarrow \frac{7\pi}{4} \text{ es un ángulo coterminoal.}$
B	Se calcula la imagen conociendo que el ángulo coterminoal se ubica en el IV cuadrante donde la función cosecante es negativa.	$\csc\left(\frac{39\pi}{4}\right)$ $= \csc\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ $= -\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $= -\sqrt{2}$

4. Asocie cada función trigonométrica con su respectiva imagen, escribiendo la letra correspondiente dentro del paréntesis.

A	$\sec\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	() $\frac{-2}{\sqrt{3}}$
B	$\csc\left(\frac{-14\pi}{3}\right)$	() -2
C	$\sec\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$	() 2
D	$\csc\left(\frac{17\pi}{6}\right)$	() $\frac{2}{\sqrt{3}}$
E	$\tan\left(\frac{31\pi}{3}\right)$	() $-\sqrt{3}$



F	$\cot\left(\frac{29\pi}{6}\right)$	() $\sqrt{3}$
----------	------------------------------------	----------------

Solución

A	$\sec\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$	(B) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$
B	$\csc\left(\frac{-14\pi}{3}\right) = -\csc\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-2}{\sqrt{3}}$	(C) -2
C	$\sec\left(\frac{-10\pi}{3}\right) = -\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$	(D) 2
D	$\csc\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \csc\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$	(A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
E	$\tan\left(\frac{31\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$	(F) $-\sqrt{3}$
F	$\cot\left(\frac{29\pi}{6}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$	(E) $\sqrt{3}$

5. Calcule los valores de β para los cuales se cumple con toda certeza que $2\text{sen}\beta + \sqrt{2} = 0$.

Solución

A	Se plantea la ecuación que se debe resolver, la cual se reduce a calcular las preimágenes de $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.	$2\text{sen}\beta + \sqrt{2} = 0$ $\Leftrightarrow \text{sen}\beta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
B	Se establece un valor conocido.	$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

<p>C</p>	<p>La función seno es negativa en los cuadrantes III y IV, lo cual permite encontrar dos posibles valores para las preimágenes.</p>	$\beta = \frac{5\pi}{4} \quad \text{o} \quad \beta = \frac{7\pi}{4}$
<p>D</p>	<p>Se aplica la periodicidad de la función seno para encontrar todas las preimágenes.</p>	$\text{sen}\beta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ 0 \\ \beta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$



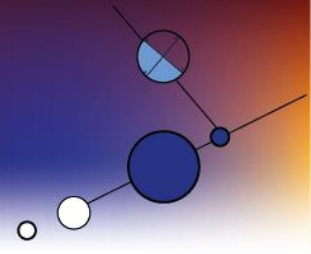
Ejercicios

1. Calcule los valores de x para los cuales se cumple con toda certeza que $3 \tan x + \sqrt{3} = 0$.
2. Asocie cada función trigonométrica con su respectiva imagen, escribiendo la letra correspondiente dentro del paréntesis.

A	$\operatorname{sen}\left(\frac{38\pi}{3}\right)$	$(\quad) \frac{2}{\sqrt{3}}$
B	$\operatorname{cos}\left(\frac{-19\pi}{6}\right)$	$(\quad) \frac{-\sqrt{3}}{2}$
C	$\operatorname{csc}\left(\frac{-14\pi}{3}\right)$	$(\quad) \frac{-1}{\sqrt{3}}$
D	$\operatorname{sec}\left(\frac{35\pi}{6}\right)$	$(\quad) \frac{\sqrt{3}}{2}$
E	$\operatorname{tan}\left(\frac{-19\pi}{6}\right)$	$(\quad) \frac{1}{\sqrt{3}}$
F	$\operatorname{cot}\left(\frac{49\pi}{3}\right)$	$(\quad) \frac{-2}{\sqrt{3}}$

3. Si $f(x) = \sec x$ determine cuáles de los siguientes valores de x tienen la misma imagen:

- a) $\frac{32\pi}{6}$
- b) $\frac{-29\pi}{6}$
- c) $\frac{41\pi}{6}$
- d) $\frac{-47\pi}{6}$



4. Si $h(x) = \text{sen } x$ calcule las preimágenes de -1 .
5. Calcule los valores de α para los cuales se cumple con toda certeza que $4 \cos \alpha - 2 = 0$.

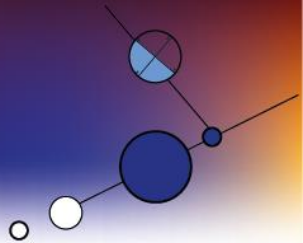
Soluciones

1.

A	Se plantea la ecuación que se debe resolver, la cual se reduce a calcular las preimágenes de $\frac{-\sqrt{3}}{3}$.	$3 \tan x + \sqrt{3} = 0$ $\Leftrightarrow \tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$
B	Se establece un valor conocido tomando en cuenta que la función tangente es negativa en el II cuadrante.	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$
D	Se aplica la periodicidad de la función tangente para encontrar todas las preimágenes.	$\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

2.

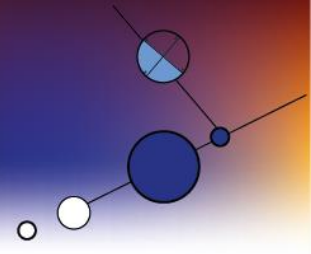
A	$\text{sen}\left(\frac{38\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	(D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
B	$\cos\left(\frac{-19\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$	(B) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
C	$\text{csc}\left(\frac{-14\pi}{3}\right) = -\text{csc}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-2}{\sqrt{3}}$	(E) $\frac{-1}{\sqrt{3}}$



D	$\sec\left(\frac{35\pi}{6}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$	(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
E	$\tan\left(\frac{-19\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$	(F) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
F	$\cot\left(\frac{49\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	(C) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$

3.

A	Se analiza $x = \frac{32\pi}{6}$.	$x = \frac{32\pi}{6} = \frac{16\pi}{3}$ Se ubica en el III cuadrante donde la secante es negativa. $\sec\left(\frac{16\pi}{3}\right) = -\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$
B	Se analiza $x = \frac{-29\pi}{6}$.	Se ubica en el III cuadrante donde la secante es negativa. $\sec\left(\frac{-29\pi}{6}\right) = -\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2}{\sqrt{3}}$
C	Se analiza $x = \frac{41\pi}{6}$.	Se ubica en el II cuadrante donde la secante es negativa. $\sec\left(\frac{41\pi}{6}\right) = -\sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2}{\sqrt{3}}$
D	Se analiza $x = \frac{-47\pi}{6}$.	Se ubica en el I cuadrante donde la secante es positiva. $\sec\left(\frac{-47\pi}{6}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$
E	Se da respuesta al problema planteado.	Los valores de x que tienen la misma imagen son $\frac{-29\pi}{6}$ y $\frac{41\pi}{6}$.



4.

A	Se encuentra el primer ángulo cuadrantal para obtener una preimagen.	$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
B	Se aplica la periodicidad de la función seno para encontrar todas las preimágenes.	$\operatorname{sen} x = -1$ $\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ tal que $k \in \mathbb{Z}$

5.

A	Se plantea la ecuación que se debe resolver, la cual se reduce a calcular las preimágenes de $\frac{1}{2}$.	$4 \cos x - 2 = 0$ $\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$
B	Se establece una preimagen usando el valor conocido del I cuadrante.	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
D	Se aplica la periodicidad de la función coseno para encontrar todas las preimágenes.	$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$