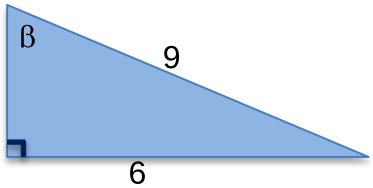
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Ejemplos

1. De acuerdo con los datos de la figura calcule el valor de $\cos\beta$.

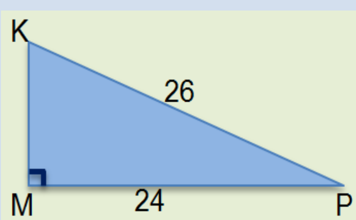


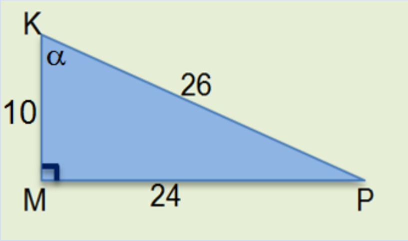
Solución

A	Se busca la longitud a del cateto adyacente al ángulo β usando el Teorema de Pitágoras.	$a^2+6^2=9^2$ $\Rightarrow a^2+36=81$ $\Rightarrow a^2=81-36$ $\Rightarrow a^2=45$ $\Rightarrow a=\sqrt{45}$ $\Rightarrow a=3\sqrt{5}$
B	Se aplica la razón trigonométrica correspondiente a coseno, es decir, la razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo β y la longitud de la hipotenusa.	$\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{5}}{9}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

2. El ΔKMP es rectángulo en M y además $\overline{KP}=26$ y $\overline{MP}=24$. Si α es el ángulo que se forma entre la hipotenusa y el cateto menor, calcule $\cot\alpha$.

Solución

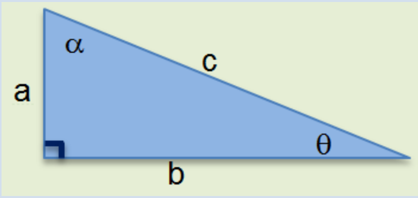
A	Se dibuja una figura representativa de la situación planteada.	

B	Se busca la longitud x del cateto $\overline{KM}$ usando el Teorema de Pitágoras.	$x^2 + 24^2 = 26^2$ $\Rightarrow x^2 + 576 = 676$ $\Rightarrow x^2 = 676 - 576$ $\Rightarrow x^2 = 100$ $\Rightarrow x = \sqrt{100}$ $\Rightarrow x = 10$
C	Como $\overline{KM}$ es el cateto menor se puede ubicar el ángulo α en la figura.	
D	Se aplica la razón trigonométrica correspondiente a cotangente, es decir, la razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo α y la longitud del cateto opuesto.	$\cot\alpha = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

3. Si α y θ son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, determine cuál de las siguientes expresiones es siempre equivalente a $\tan\theta$:

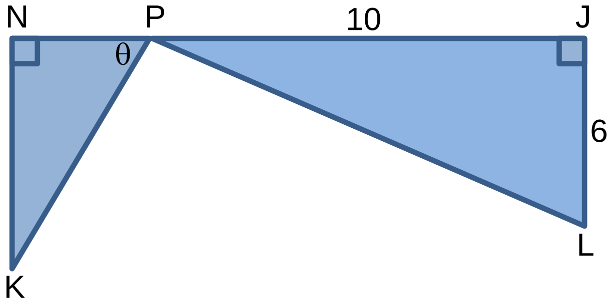
a) $\cot\theta$
b) $\tan\alpha$
c) $\dfrac{1}{\tan\theta}$
d) $\cot\alpha$
e) $\dfrac{1}{\cot\alpha}$

Solución

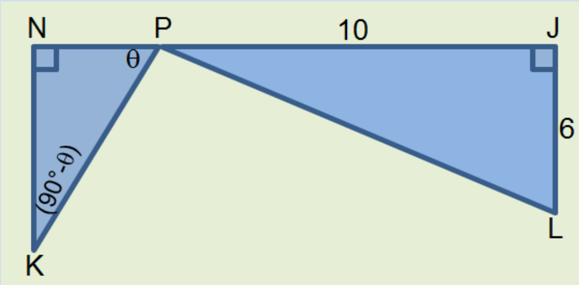
A	Se dibuja una figura representativa de la situación planteada.	
B	Se aplica la razón trigonométrica correspondiente a tangente, es decir, la razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud del cateto adyacente.	$\tan\theta = \frac{a}{b}$

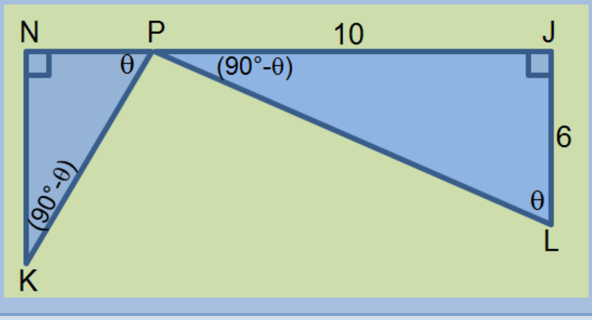
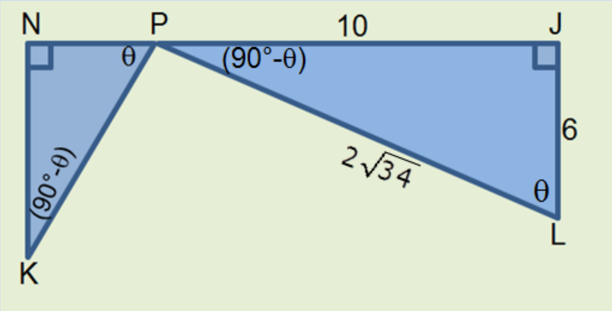
C	Se calculan las razones trigonométricas de cada una de las expresiones dadas.	a) $\cot\theta = \frac{b}{a}$ b) $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ c) $\frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ d) $\cot\alpha = \frac{a}{b}$ e) $\frac{1}{\cot\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$
D	Se elige la expresión equivalente a $\tan\theta$.	$\tan\theta = \cot\alpha$

4. De acuerdo con los datos de la figura con $\Delta JLP \sim \Delta NPK$ calcule $\sec(90° - \theta) + \csc\theta$.



Solución

A	Se ubica en el ΔNPK el ángulo $(90° - \theta)$.	

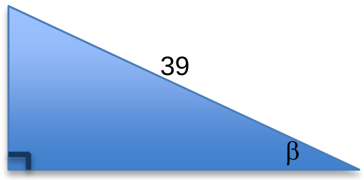
B	Como $\Delta JLP \sim \Delta NPK$ entonces se cumple que: $< \theta \sim < JLP$ $< (90° - \theta) \sim < LPJ$	
C	Se calcula la longitud de la hipotenusa del triángulo ΔJLP.	$10^2 + 6^2 = c^2$ $\Rightarrow 136 = c^2$ $\Rightarrow \sqrt{136} = c$ $\Rightarrow 2\sqrt{34} = c$ 
D	Se realiza el cálculo utilizando las razones trigonométricas correspondientes a secante y cosecante.	$\sec(90° - \theta) + \csc\theta$ $= \frac{2\sqrt{34}}{10} + \frac{2\sqrt{34}}{10}$ $= \frac{2\sqrt{34}}{5}$

Ejercicios

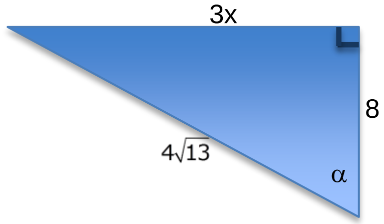
1. En un triángulo rectángulo los catetos miden $18\,\text{cm}$ y $24\,\text{cm}$ respectivamente. Si β es el ángulo que se forma entre la hipotenusa y el cateto mayor calcule $\tan\beta + \sec\beta$.

2. Un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es α. Si se tiene que $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$ y el perímetro del triángulo mide $120\ \text{cm}$, entonces, calcule la longitud de la hipotenusa.

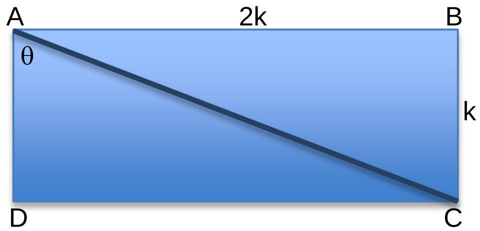
3. De acuerdo con los datos de la figura adjunta, en la cual se cumple que $\tan\beta = \dfrac{5}{12}$, calcule la longitud del cateto opuesto al ángulo β.



4. De acuerdo con los datos de la figura adjunta calcule $\sec(90^\circ - \alpha)$.

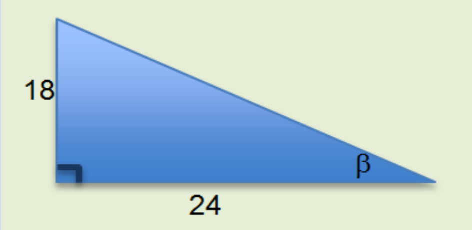


5. En la figura adjunta $\square ABCD$ es un rectángulo. Calcule $\cos(90^\circ - \theta)$.



Soluciones

1.

A	Se dibuja una figura que represente la situación planteada.	
B	Se calcula la longitud de la hipotenusa aplicando el Teorema de Pitágoras.	$18^2+24^2=c^2$ $\Rightarrow 324+576=c^2$ $\Rightarrow 900=c^2$ $\Rightarrow \sqrt{900}=c$ $\Rightarrow 30=c$
C	Se realiza el cálculo aplicando las razones trigonométricas.	$\tan\beta+\sec\beta$ $=\frac{18}{24}+\frac{30}{24}$ $=2$

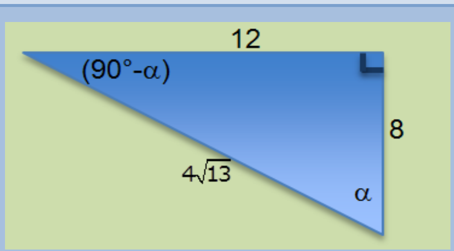
2.

A	Si se tiene que $\cos\alpha=\frac{15}{17}$ eso significa que la longitud del cateto adyacente a ese ángulo agudo es múltiplo de 15, es decir $15k$ con $k\in\mathbb{Z}^+$ y la longitud de la hipotenusa es múltiplo de 17, es decir $17k$ con $k\in\mathbb{Z}^+$. Utilizando el teorema de Pitágoras se calcula la longitud x del cateto opuesto al ángulo α.	$x^2+(15k)^2=(17k)^2$ $\Rightarrow x^2+225k^2=289k^2$ $\Rightarrow x^2=289k^2-225k^2$ $\Rightarrow x^2=64k^2$ $\Rightarrow x=\sqrt{64k^2}$ $\Rightarrow x=8k$
B	Se calcula el valor de k haciendo uso del perímetro.	$15k+17k+8k=120$ $\Rightarrow 40k=120$ $\Rightarrow k=\frac{120}{40}$ $\Rightarrow k=3$
C	Se calcula la longitud de la hipotenusa.	$17k=17\cdot 3=51$

3.

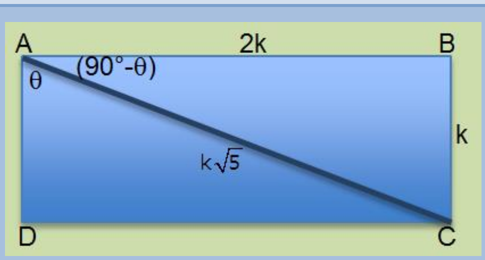
A	Si se tiene que $\tan\beta = \dfrac{5}{12}$ eso significa que la longitud del cateto opuesto a ese ángulo agudo es múltiplo de 5, es decir $5k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ y la longitud del cateto adyacente es múltiplo de 12, es decir $12k$ con $k \in \mathbb{Z}^+$. Utilizando el teorema de Pitágoras se calcula la el valor de k.	$(5k)^2 + (12k)^2 = 39^2$ $\Rightarrow 25k^2 + 144k^2 = 1521$ $\Rightarrow 169k^2 = 1521$ $\Rightarrow k^2 = \dfrac{1521}{169}$ $\Rightarrow k^2 = 9$ $\Rightarrow k = \sqrt{9}$ $\Rightarrow k = 3$
B	Se calcula la longitud del cateto opuesto al ángulo β.	$5k = 5 \cdot 3 = 15$

4.

A	Se calcula la longitud del cateto opuesto al ángulo α utilizando el Teorema de Pitágoras.	$8^2 + (3x)^2 = \left(4\sqrt{13}\right)^2$ $\Rightarrow 64 + 9x^2 = 208$ $\Rightarrow 9x^2 = 208 - 64$ $\Rightarrow 9x^2 = 144$ $\Rightarrow x^2 = \dfrac{144}{9}$ $\Rightarrow x^2 = 16$ $\Rightarrow x = \sqrt{16}$ $\Rightarrow x = 4$ $\Rightarrow 3x = 3 \cdot 4 = 12$
B	Se calcula la razón trigonométrica correspondiente a $\sec(90° - \alpha)$.	

		$\sec(90° - \alpha) = \frac{4\sqrt{13}}{12} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

5.

A	Se calcula la longitud de la diagonal del rectángulo usando el Teorema de Pitágoras.	$(2k)^2 + k^2 = c^2$ $\Rightarrow 4k^2 + k^2 = c^2$ $\Rightarrow 5k^2 = c^2$ $\Rightarrow \sqrt{5k^2} = c$ $\Rightarrow k\sqrt{5} = c$
B	Se calcula la razón trigonométrica respectiva.	 $\cos(90° - \alpha) = \frac{2k}{k\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$