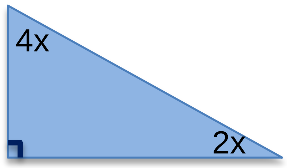
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ESPECIALES

Ejemplos

1. De acuerdo con los datos de la figura calcule el valor de $\tan(2x)$.



Solución

A	Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, es decir, la suma de sus medidas es 90°.	$2x + 4x = 90°$ $\Rightarrow 6x = 90°$ $\Rightarrow x = \dfrac{90°}{6}$ $\Rightarrow x = 15°$
B	Se calcula la razón trigonométrica del ángulo que mide $2x$.	$\tan(2x)$ $= \tan(2 \cdot 15°)$ $= \tan 30°$ $= \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2. Calcule $\operatorname{sen}(3x) + \cos(2x + 15°) - \tan(x + 30°) \cdot \sec\left(\dfrac{x}{3} + 40°\right)$ con $x = 15°$.

Solución

A	Se calcula la medida de cada uno de los ángulos.	$\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(3 \cdot 15°) = \operatorname{sen} 45°$ $\cos(2x + 15°) = \cos(2 \cdot 15° + 15°) = \cos 45°$ $\tan(x + 30°) = \tan(15° + 30°) = \tan 45°$ $\sec\left(\dfrac{x}{3} + 40°\right) = \sec\left(\dfrac{15°}{3} + 40°\right) = \sec 45°$

B	Se aplican las razones trigonométricas del triángulo rectángulo isósceles.	$\operatorname{sen}45° + \cos 45° - \tan 45° \cdot \sec 45°$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \cdot \sqrt{2}$ $= 0$

3. Si $\triangle ABC$ es equilátero y se cumple que $\cos A = \frac{3x}{5}$, calcule el valor de x.

Solución

A	Si el triángulo es equilátero también es equiángulo, es decir, cada uno de sus ángulos mide $60°$.	$\cos A = \cos 60° = \frac{1}{2}$
B	Se resuelve la ecuación correspondiente.	$\frac{1}{2} = \frac{3x}{5}$ $\Rightarrow x = \frac{5}{6}$

4. Asocie cada razón trigonométrica con su respectivo valor, escribiendo la letra correspondiente dentro del paréntesis.

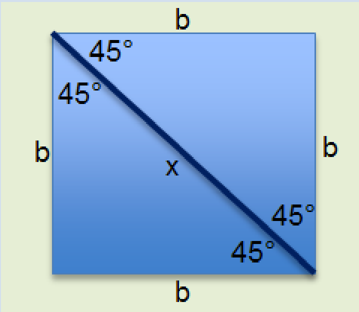
A	$\tan 45°$	( ) 2
B	$\sec 60°$	( ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C	$\cos 30°$	( ) $\frac{1}{2}$
D	$\operatorname{sen}45°$	( ) 1
E	$\operatorname{sen}30°$	( ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
F	$\cot 60°$	( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución

A	$\tan 45°$	$(B)\ 2$
B	$\sec 60°$	$(D)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$
C	$\cos 30°$	$(E)\ \frac{1}{2}$
D	$\operatorname{sen} 45°$	$(A)\ 1$
E	$\operatorname{sen} 30°$	$(F)\ \frac{\sqrt{3}}{3}$
F	$\cot 60°$	$(C)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Pruebe que la longitud, en centímetros, de la diagonal de un cuadrado con perímetro $8\sqrt{2}$ cm es igual a $\csc^4 \alpha$, siendo α el ángulo que se forma entre uno de los lados del cuadrado y su diagonal.

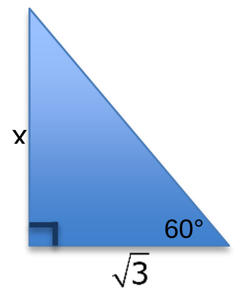
Solución

A	Se hace una figura representativa del problema planteado, en la cual se observa que cada uno de los triángulos que se forman son triángulos rectángulos isósceles, cuyos ángulos agudos miden $45°$ cada uno.	
B	Se calcula la longitud b de cada lado del cuadrado.	$P = 8\sqrt{2}$ $\Rightarrow 4b = 8\sqrt{2}$ $\Rightarrow b = \frac{8\sqrt{2}}{4}$ $\Rightarrow b = 2\sqrt{2}$

C	Se calcula la longitud x de la diagonal del cuadrado usando el Teorema de Pitágoras.	$b^2 + b^2 = x^2$ $\Rightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = x^2$ $\Rightarrow 16 = x^2$ $\Rightarrow 4 = x$
D	El ángulo α mide $45°$ con lo cual se calcula el valor de cosecante.	$\csc\alpha = \csc 45° = \sqrt{2}$
D	Se verifica la igualdad.	$\csc^4\alpha = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$ $\Rightarrow x = 4 = \csc^4\alpha$

Ejercicios

1. De acuerdo con los datos de la figura adjunta calcule el valor de x.

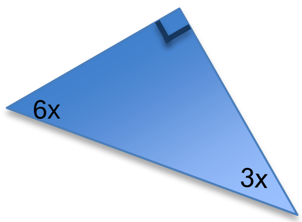


2. Si β es un ángulo agudo de un triángulo que se obtiene al trazar la altura sobre un lado de un triángulo equilátero y además cumple la igualdad $\cos\beta = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{3}}$, calcule $\tan\beta$.

3. El ΔABC es isósceles y rectángulo en B, además $\overline{BK}$ es altura sobre $\overline{AC}$. Si $< ABK = \alpha$ calcule $\cot\alpha$.

4. Si β es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\tan\beta = \sqrt{3}$, calcule $\sec\beta + \cos\beta \cdot \operatorname{sen}^2\beta$.

5. De acuerdo con los datos de la figura adjunta calcule $\cot(6x) + \cot(3x) - \csc(6x)$.



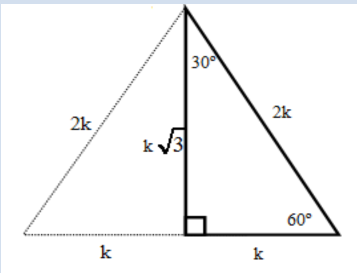
6. Si $x = 20°$ calcule $\tan(2x + 5°) - \operatorname{sen}^2(3x) + \cos\left(\dfrac{x}{4} + 40°\right) \cdot \cot(x + 10°)$.

Soluciones

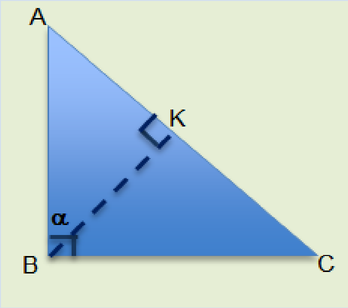
1.

A	Se plantea la razón trigonométrica para $60°$.	$\tan 60° = \sqrt{3}$
B	Se resuelve la ecuación de acuerdo a los datos de la figura.	$\tan 60° = \frac{x}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = x$ $\Rightarrow 3 = x$

2.

A	Si hace una figura representativa de la situación planteada.	
B	Se tienen dos posibilidades para la medida del ángulo β, se prueba la igualdad con cada una de ellas.	Si $\beta = 30°$ $\Rightarrow \cos 30° \neq \frac{\text{sen}30°}{\sqrt{3}}$ porque $\frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{6}$ Si $\beta = 60°$ $\Rightarrow \cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{\text{sen}60°}{\sqrt{3}}$ $\therefore \beta = 60°$
C	Se calcula la tangente.	$\tan 60° = \sqrt{3}$

3.

A	Se hace una figura representativa de la situación planteada.	
B	Se calcula la medida del ángulo α.	$\overline{BK}$ bisectriz de $< ABC$ $\Rightarrow \alpha = 45°$
C	Se calcula la cotangente.	$\cot\alpha = \cot 45° = 1$

4.

A	Se calcula el valor del ángulo β.	$\tan\beta = \sqrt{3}$ $\Rightarrow \beta = 60°$
B	Se calcula la el valor de la expresión.	$\sec\beta + \cos\beta \cdot \operatorname{sen}^2\beta$ $= \sec 60° + \cos 60° \cdot \operatorname{sen}^2 60°$ $= 2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ $= \frac{19}{8}$

5.

A	Se calcula el valor de x tomando en cuenta que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.	$3x+6x=90^\circ$ $\Rightarrow 9x=90^\circ$ $\Rightarrow x=\dfrac{90^\circ}{9}$ $\Rightarrow x=10^\circ$
B	Se calcula el valor de la expresión.	$\cot(6x)+\cot(3x)-\csc(6x)$ $=\cot(6\cdot 10^\circ)+\cot(3\cdot 10^\circ)-\csc(6\cdot 10^\circ)$ $=\cot 60^\circ+\cot 30^\circ-\csc 60^\circ$ $=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

6.

A	Se calcula la medida de cada uno de los ángulos.	$\tan(2x+5^\circ)=\tan(2\cdot 20^\circ+5^\circ)=\tan 45^\circ$ $\operatorname{sen}^2(3x)=\operatorname{sen}^2(3\cdot 20^\circ)=\operatorname{sen}^2 60^\circ$ $\cos\left(\dfrac{x}{4}+40^\circ\right)=\cos\left(\dfrac{20^\circ}{4}+40^\circ\right)=\cos 45^\circ$ $\cot(x+10^\circ)=\cot(20^\circ+10^\circ)=\cot 30^\circ$
B	Se aplican las razones trigonométricas.	$\tan(2x+5^\circ)-\operatorname{sen}^2(3x)+\cos\left(\dfrac{x}{4}+40^\circ\right)\cdot\cot(x+10^\circ)$ $=\tan 45^\circ-\operatorname{sen}^2 60^\circ+\cos 45^\circ\cdot\cot 30^\circ$ $=1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}$ $=\dfrac{1+2\sqrt{6}}{4}$