DEFINICIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplos

1. Si $\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ es el punto en la circunferencia trigonométrica asociado a $x=\frac{28\pi}{3}$, calcule el valor de la expresión $\sec x+\csc x$.

Solución

A	Del punto asociado a x se deducen los valores correspondientes a las funciones trigonométricas seno y coseno.	$\operatorname{sen}\left(\frac{28\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\cos\left(\frac{28\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}$
B	Se usan las definiciones de secante y cosecante para calcular el valor de la expresión.	$\sec x+\csc x$ $=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ $=\frac{1}{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}$. $=-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. Encuentre el punto asociado en la circunferencia trigonométrica para $x=\frac{109\pi}{6}$.

Solución

A	Se descompone el valor de x.	$x=\frac{109\pi}{6}=\frac{108\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=18\pi+\frac{\pi}{6}$

B	Se aplica el hecho de que las funciones seno y coseno son periódicas con período 2π.	$\operatorname{sen}\left(\frac{109\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\left(18\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ $\cos\left(\frac{109\pi}{6}\right)=\cos\left(18\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
C	Se encuentra el punto asociado.	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

3. Si x pertenece al conjunto $\left\{\frac{11\pi}{6},\frac{28\pi}{8},\frac{-9\pi}{12},\frac{-39\pi}{6}\right\}$, determine cuáles de estos valores de x no pertenecen al dominio de la función $\tan x$.

Solución

A	Como $\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, $\cos x\neq 0$ la función se indefine cuando $\cos x=0$ lo cual permite establecer su dominio.	$D=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
B	Se analiza si $x=\frac{11\pi}{6}$ pertenece al dominio de la función.	$\frac{11\pi}{6}=\frac{3\pi}{6}+\frac{8\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}$ Sí pertenece al dominio de tangente.
C	Se analiza si $x=\frac{28\pi}{8}$ pertenece al dominio de la función.	$\frac{28\pi}{8}=\frac{7\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{6\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+3\pi$ No pertenece al dominio de tangente.
D	Se analiza si $x=\frac{-9\pi}{12}$ pertenece al dominio de la función.	$\frac{-9\pi}{12}=\frac{-3\pi}{4}=\frac{2\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}$ Sí pertenece al dominio de tangente.
E	Se analiza si $x=\frac{-39\pi}{6}$ pertenece al dominio de la función.	$x=\frac{-39\pi}{6}=\frac{-13\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{14\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-7\pi$ No pertenece al dominio de tangente.

4. Encuentre los valores de x para los cuales se puede afirmar con toda certeza que $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Solución

A	Si $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ se buscan los puntos asociados en la circunferencia trigonométrica.	$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
B	Se calculan los valores de x en la circunferencia trigonométrica para el punto $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
C	Se calculan los valores de x en la circunferencia trigonométrica para el punto $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.	$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}$
D	Se aplica el hecho de que la función coseno es periódica con período 2π.	$\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \text{o} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

5. Calcule $\cot\left(\frac{-39\pi}{4}\right) + \sec\left(\frac{13\pi}{3}\right)$.

Solución

A	Se aplican las definiciones de las funciones cotangente y secante.	$\cot\left(\frac{-39\pi}{4}\right)+\sec\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ $=\dfrac{\cos\left(\frac{-39\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{-39\pi}{4}\right)}+\dfrac{1}{\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)}$
B	Se descomponen los ángulos.	$\frac{-39\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{40\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-10\pi$ $\frac{13\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{12\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+4\pi$
C	Se aplica el hecho de que las funciones seno y coseno son periódicas con período 2π.	$\cos\left(\frac{-39\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{sen}\left(\frac{-39\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$
D	Se calcula el valor de la expresión.	$=\dfrac{\cos\left(\frac{-39\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{-39\pi}{4}\right)}+\dfrac{1}{\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)}$ $=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}}$ $=3$

Ejercicios

1. Si x pertenece al conjunto $A=\left\{\frac{-15\pi}{2},\frac{21\pi}{3},\frac{38\pi}{4},\frac{9\pi}{4},\frac{-18\pi}{3}\right\}$ determine cuál es el único valor de x que pertenece al dominio de la función $f(x)=\frac{\tan x}{\csc x}$.

2. Determine los valores de x para que la igualdad $2\operatorname{sen}x+\sqrt{2}=0$.

3. Si el punto asociado para $x=\frac{-83\pi}{6}$ es $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ calcule $\sec x+\cos x-\tan x$

   .

4. Calcule $\dfrac{\cot\left(\frac{-3\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{-15\pi}{4}\right)}+\tan\left(\frac{19\pi}{3}\right)$.

5. Asocie cada ángulo con su punto correspondiente en la circunferencia trigonométrica, escribiendo la letra respectiva dentro del paréntesis.

A	$\frac{7\pi}{6}$	( ) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
B	$\frac{-19\pi}{6}$	( ) $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
C	$\frac{85\pi}{6}$	( ) $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
D	$\frac{8\pi}{3}$	( ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
E	$\frac{-7\pi}{3}$	( ) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$

Soluciones

1.

A	Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \cos x \neq 0$ la función se indefine cuando $\cos x = 0$ lo cual permite establecer su dominio.	$D_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$
B	Como $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}, \operatorname{sen} x \neq 0$ la función se indefine cuando $\operatorname{sen} x = 0$ lo cual permite establecer su dominio.	$D_{\csc} = \mathbb{R} - \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
C	Se calcula el dominio de $f(x) = \dfrac{\tan x}{\csc x}$.	$D_f = \mathbb{R} - \left[\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\right]$
D	Se analiza si $x = \dfrac{-15\pi}{2}$ pertenece al dominio de $f(x)$.	$\dfrac{-15\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{16\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - 8\pi$ No pertenece al dominio de $f(x)$.
E	Se analiza si $x = \dfrac{21\pi}{3}$ pertenece al dominio de $f(x)$.	$\dfrac{21\pi}{3} = 7\pi = \pi + 6\pi$ No pertenece al dominio de $f(x)$.
F	Se analiza si $x = \dfrac{38\pi}{4}$ pertenece al dominio de $f(x)$.	$\dfrac{38\pi}{4} = \dfrac{19\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{18\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 9\pi$ No pertenece al dominio de $f(x)$.
G	Se analiza si $x = \dfrac{9\pi}{4}$ pertenece al dominio $f(x)$.	$x = \dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{8\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi$ Sí pertenece al dominio de $f(x)$.
H	Se analiza si $x = \dfrac{-18\pi}{3}$ pertenece al dominio de $f(x)$.	$x = \dfrac{-18\pi}{3} = -6\pi = \pi - 7\pi$ No pertenece al dominio de $f(x)$.

I	Se responde al problema planteado.	El único valor de x que pertenece al dominio de la función $f(x)=\dfrac{\tan x}{\csc x}$ es $x=\dfrac{9\pi}{4}$.

2.

A	Se despeja la función seno.	$2\operatorname{sen}x+\sqrt{2}=0$ $\Rightarrow \operatorname{sen}x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$
B	Si $\operatorname{sen}x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ se buscan los puntos asociados en la circunferencia trigonométrica.	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right),\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2},\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
C	Se calculan los valores de x en la circunferencia trigonométrica para el punto $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2},\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.	$\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$
D	Se calculan los valores de x en la circunferencia trigonométrica para el punto $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.	$\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$
E	Se aplica el hecho de que la función seno es periódica con período 2π.	$\operatorname{sen}x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\\ \text{o}\\ x=\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

3.

A	Del punto asociado a x se deducen los valores correspondientes a las funciones trigonométricas seno y coseno.	$\operatorname{sen}\left(\frac{-83\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ $\cos\left(\frac{-83\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
B	Se usan las definiciones de secante y cosecante para calcular el valor de la expresión.	$\sec x+\cos x-\tan x$ $=\frac{1}{\cos x}+\cos x-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$ $=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. $=\frac{5\sqrt{3}}{6}$

4.

A	Se aplican las definiciones de las funciones cotangente y tangente.	$\frac{\cot\left(\frac{-3\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{-15\pi}{4}\right)}+\tan\left(\frac{19\pi}{3}\right)$ $=\frac{\frac{\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{-3\pi}{2}\right)}}{\operatorname{sen}\left(\frac{-15\pi}{4}\right)}+\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)}$
B	Se descomponen los ángulos.	$\frac{-3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-2\pi$ $\frac{-15\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{16\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-4\pi$ $\frac{19\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{18\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+6\pi$

C	Se aplica el hecho de que las funciones seno y coseno son periódicas con período 2π.	$\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ $\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{2}\right)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ $\text{sen}\left(\frac{-15\pi}{4}\right)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ $\text{sen}\left(\frac{19\pi}{3}\right)=\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
D	Se calcula el valor de la expresión.	$=\frac{\frac{\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{2}\right)}}{\text{sen}\left(\frac{-15\pi}{4}\right)}+\frac{\text{sen}\left(\frac{19\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)}$ $=\frac{\frac{0}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

5.

A	$\frac{7\pi}{6}$	(B) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
B	$\frac{-19\pi}{6}$	(D) $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
C	$\frac{85\pi}{6}$	(E) $\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
D	$\frac{8\pi}{3}$	(C) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

E	$\frac{-7\pi}{3}$	(A) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$