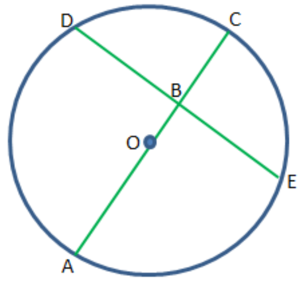
TEOREMAS SOBRE SEGMENTOS Y CIRCUNFERENCIAS

Ejemplos

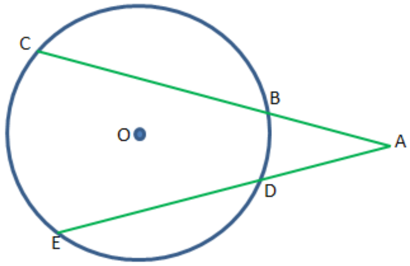
1. En la figura adjunta se muestra una circunferencia con centro en O y radio 6 cm en la que se han trazado dos secantes. Si B es el punto medio de $\overline{DE}$ y además se sabe que la longitud de $\overline{BC}$ es un tercio de la longitud de $\overline{AC}$, calcular la longitud de $\overline{DB}$.



Solución

A	Se calcula la longitud de $\overline{AC}$ que corresponde al diámetro.	$\overline{AC} = 2 \cdot 6$ $\Rightarrow \overline{AC} = 12$
B	Se calcula la longitud de $\overline{BC}$ que es un tercio de $\overline{AC}$.	$\overline{BC} = \frac{1}{3} \cdot 12$ $\Rightarrow \overline{BC} = 4$
C	Se usa el hecho de que B es el punto medio de $\overline{DE}$.	$\overline{DB} \cong \overline{BE}$
D	Se aplica el teorema de las cuerdas.	$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{DB} \cdot \overline{BE}$ $\Rightarrow 8 \cdot 4 = \overline{DB} \cdot \overline{DB}$ $\Rightarrow 32 = \overline{DB}^2$ $\Rightarrow 4\sqrt{2} = \overline{DB}$
E	El $\overline{DB}$ arco mide $4\sqrt{2}\text{ cm}$.	

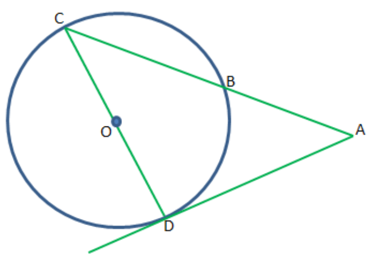
2. En la figura adjunta se muestra una circunferencia con centro en O y en la que se han trazado dos secantes. Se sabe que $\overline{AC}$ mide $10\ \text{cm}$, que $\overline{CB}$ mide $4\ \text{cm}$ y que $\overline{AE}$ mide $12\ \text{cm}$. Calcular la longitud de $\overline{AD}$.



Solución

A	Se calcula la longitud de $\overline{AB}$.	$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{CB}$ $\Rightarrow \overline{AB} = 10 - 4$ $\Rightarrow \overline{AB} = 6$
B	Se aplica el teorema de las secantes.	$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AE} \cdot \overline{AD}$ $\Rightarrow 10 \cdot 6 = 12 \cdot \overline{AD}$ $\Rightarrow 5 = \overline{AD}$
C	Por lo tanto, la longitud de $\overline{AD}$ es $5\ \text{cm}$.	

3. En la figura adjunta se muestra una circunferencia con centro en O que tiene un radio de $6\ \text{cm}$ y en la que se trazaron una secante y una tangente. Si $\overline{AC}$ mide $16\ \text{cm}$ y $\overline{AB}$ mide $6\ \text{cm}$, calcular el perímetro del $\triangle ACD$.

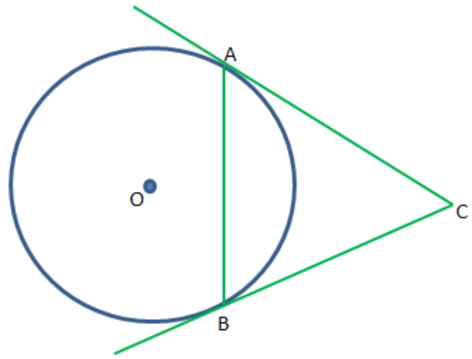


Solución

A	Se aplica el teorema de la tangente y la secante.	$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AD}^2$ $\Rightarrow 16 \cdot 6 = \overline{AD}^2$ $\Rightarrow 4\sqrt{6} = \overline{AD}$
B	Se aplica el radio para encontrar el diámetro.	$\overline{CD} = 2 \cdot 6$ $\Rightarrow \overline{CD} = 12$
C	Finalmente se calcula el perímetro del triángulo.	$P = \overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AC}$ $\Rightarrow P = 4\sqrt{6} + 12 + 16$ $\Rightarrow P = 4\sqrt{6} + 28$
D	Por lo tanto, el perímetro del $\triangle ACD$ mide $\left(4\sqrt{6} + 28\right)$ cm.	

Ejercicios

1. Desde un punto exterior C se trazan dos tangentes a una circunferencia con centro en O, como se muestra en la figura adjunta. Si $\angle ACB = 60°$ y $\overline{AB} = 8$ cm calcule la longitud de $\overline{CA}$.



2. En la figura adjunta se presenta una circunferencia con centro en O y en la que desde el punto exterior A se han trazado dos secantes. Además se tienen las siguientes longitudes:

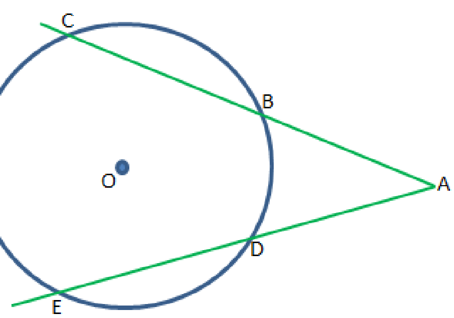
$\overline{AB} = x + 2$

$\overline{AC} = 4x$

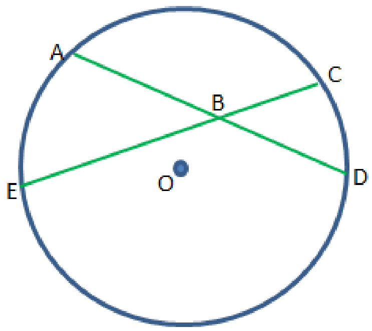
$\overline{AD} = x + 1$

$\overline{AE} = 3x + 6$

Calcule el valor de x.

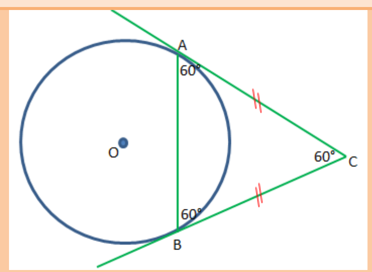


3. En una circunferencia con centro en O se trazan dos cuerdas como se muestra en la figura adjunta. Se sabe que $\overline{AB} = 4$, $\overline{BD} = 5$ y además $\overline{EB}$ es dos tercios de $\overline{BC}$. Calcule la longitud de $\overline{BC}$.



Soluciones

1.

A	Se aplica el teorema de las tangentes.	$\overline{CA} \cong \overline{CB}$
B	Se forma un triángulo equilátero.	
C	Así se tiene la longitud del segmento.	$\overline{CA} = 8$
D	Por lo tanto, el segmento mide 8 cm.	

2.

A	Se aplica el teorema de las secantes.	$\overline{AC}\cdot\overline{AB}=\overline{AE}\cdot\overline{AD}$ $\Rightarrow 4x(x+2)=(3x+6)(x+1)$
B	Se resuelve la ecuación.	$\Rightarrow 4x^2+8x=3x^2+9x+6$ $\Rightarrow x^2-x-6=0$ $\Rightarrow x=3 \text{ ó } x=-2$
C	Se descarta el valor negativo porque son longitudes.	$x=3$
D	Por lo tanto, el valor de x es 3.	

3.

A	Se tiene que $\overline{EB}$ es dos tercios de $\overline{BC}$.	$\overline{EB}=\frac{2}{3}\overline{BC}$
B	Se aplica el teorema de las cuerdas.	$\overline{AB}\cdot\overline{BD}=\overline{EB}\cdot\overline{BC}$ $\Rightarrow 4\cdot 5=\frac{2}{3}\overline{BC}\cdot\overline{BC}$ $\Rightarrow 30=\overline{BC}^2$ $\Rightarrow \sqrt{30}=\overline{BC}$
C	Por lo tanto, el segmento mide $\sqrt{30}$ cm.	