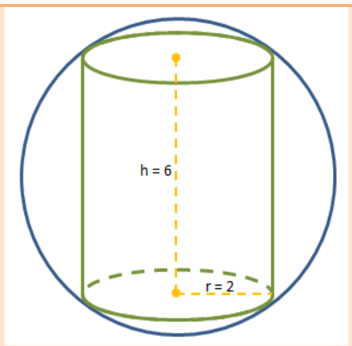
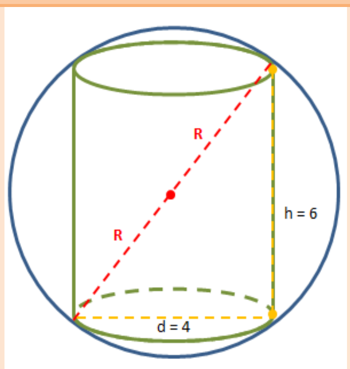
CUERPOS GEOMÉTRICOS

Ejemplos

1. Un cilindro cuyo radio de la base mide $2\ \text{cm}$ y su altura mide $6\ \text{cm}$ está inscrito en una esfera. Calcular el volumen de la esfera que no está ocupado por el cilindro.

Solución

A	Se traza una figura representativa.	
B	Se calcula el volumen V_1 del cilindro.	$V_1 = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi$
C	Sea R el radio de la esfera.	
D	Se aplica el teorema de Pitágoras.	$4^2 + 6^2 = (2R)^2$ $\Rightarrow 52 = 4R^2$ $\Rightarrow 13 = R^2$ $\Rightarrow \sqrt{13} = R$
E	Se calcula el volumen V_2 de la esfera.	$V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{13}\right)^3 = \frac{52\pi\sqrt{13}}{3}$

F	Se resta el volumen del cilindro del volumen de la esfera para obtener el volumen V_3 de la esfera que no está ocupado por el cilindro.	$V_3 = V_2 - V_1$ $= \dfrac{52\pi\sqrt{13}}{3} - 24\pi$
G	El volumen de la esfera que no está ocupado por el cilindro es $\left(\dfrac{52\pi\sqrt{13}}{3} - 24\pi\right) cm^3$.	

2. Resolver el siguiente problema:

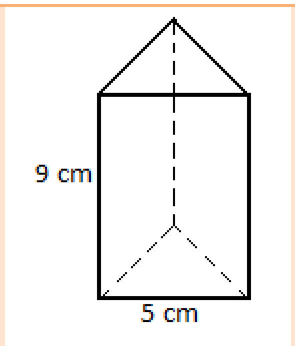
Un fabricante de perfumes tiene dos opciones para envasar su nuevo producto:

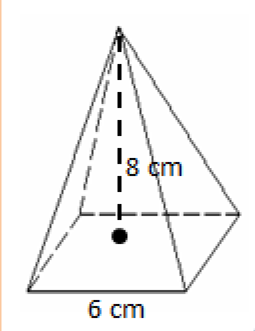
a) Un envase con forma de prisma recto con altura $9\ cm$ y cuyas bases son dos triángulos equiláteros de lado $5\ cm$.

b) Un envase piramidal de base cuadrada de lado $6\ cm$ y altura $8\ cm$.

Él desea escoger el envase que tenga menor volumen para ahorrar producto. ¿Cuál sería ese envase?

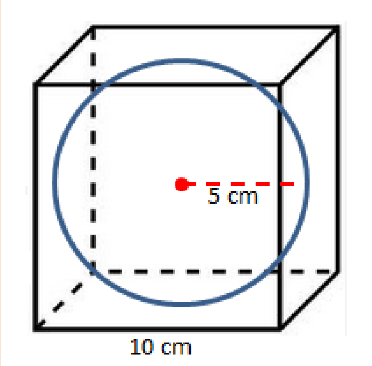
Solución

A	Se calcula el volumen del envase con forma de prisma recto con altura $9\ cm$ y cuyas bases son dos triángulos equiláteros de lado $5\ cm$.	 Área de la base: $A = \dfrac{5^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}$ Volumen: $V = \dfrac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 9 = \dfrac{225\sqrt{3}}{4} \approx 97{,}42$

B	Se calcula el volumen del envase piramidal de base cuadrada de lado 6 cm y altura 8 cm.	 Área de la base: $A = 6^2 = 36$ Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 8 = 96$
C	El envase con el menor volumen es el piramidal, cuyo volumen es 96 cm^3.	

3. Calcular el área de una esfera inscrita en un cubo de lado 10 cm.

Solución

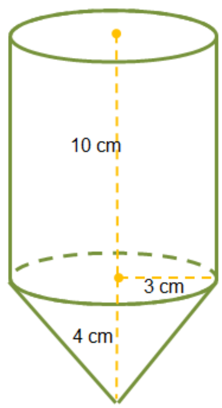
A	Si la esfera está inscrita en el cubo entonces su radio mide la mitad del lado del cubo.	
B	Se calcula el área A de la esfera.	$A = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$
C	El área de la esfera es $100\pi\text{ cm}^2$.	

Ejercicios

1. Calcular el área de la base, el área lateral y el volumen de una pirámide recta con altura 8 cm y cuya base es un octógono regular de lado 4 cm y apotema $4{,}8\text{ cm}$.

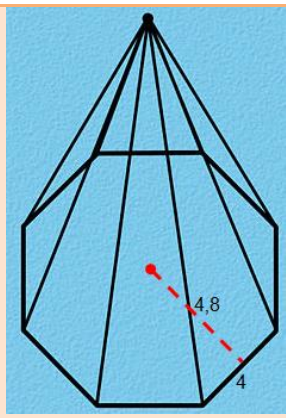
2. Calcular el área de la base, el área lateral y el volumen de un cono recto cuyo radio de la base mide 3 m y su altura es de 6 m.

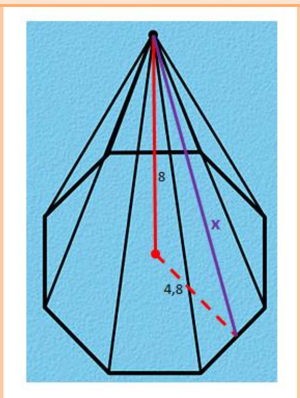
3. Calcular el volumen de un contenedor como el que se muestra en la figura adjunta:



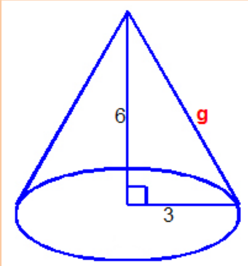
Soluciones

1.

A	Se calcula el área de la base.	 Perímetro del octógono: $P = 8 \cdot 4 = 32$

		Área del octógono: $A_{base} = \frac{32 \cdot 4,8}{2} = \frac{384}{5}\ cm^2$
B	Se calcula la apotema de la pirámide usando el teorema de Pitágoras.	 $8^2 + (4,8)^2 = x^2$ $\Rightarrow \frac{2176}{25} = x^2$ $\Rightarrow \frac{8\sqrt{34}}{5} = x$
C	Se calcula el área lateral formada por ocho triángulos congruentes cuya altura es la apotema de la pirámide.	$A_{lateral} = 8 \cdot \frac{4 \cdot \frac{8\sqrt{34}}{5}}{2}$ $= \frac{128\sqrt{34}}{5}\ cm^2$
D	Se calcula el volumen de la pirámide.	$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{384}{5} \cdot 8 = \frac{1024}{5}\ cm^3$

2.

A	Se calcula el área de la base.	$A_{base} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ m}^2$
B	Se calcula la medida de la generatriz del cono aplicando el teorema de Pitágoras.	 $g^2 = 6^2 + 3^2$ $\Rightarrow g = 3\sqrt{5}$
C	Se calcula el área lateral.	$A_{lateral} = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{5} = 9\pi\sqrt{5} \text{ m}^2$
D	Se calcula el volumen.	$V = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 6}{3} = 18\pi \text{ m}^3$

3.

A	Se calcula el volumen del cilindro.	$V_{cilindro} = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi \text{ cm}^3$
B	Se calcula el volumen del cono.	$V_{cono} = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12\pi \text{ cm}^3$
C	Se calcula el volumen del contenedor.	$V_{contenedor} = 90\pi + 12\pi = 102\pi \text{ cm}^3$