PERÍMETRO Y ÁREA DEL CÍRCULO Y SUPERFICIES RELACIONADAS

Ejemplos

1. Un sector circular está determinado por un ángulo central que mide 70° y tiene un área de $\frac{175\pi}{36}$ cm^2. Calcular la longitud del arco que subtiene.

Solución

A	Se calcula la longitud del radio usando el área y el ángulo central.	$\frac{175\pi}{36} = \frac{\pi r^2 \cdot 70^\circ}{360^\circ}$ $\Rightarrow r = 5$
B	Se calcula la longitud del arco que subtiene.	$\frac{175\pi}{36} = \frac{5 \cdot s}{2}$ $\Rightarrow s = \frac{35\pi}{18}$
C	El arco mide $\frac{35\pi}{18}$ cm.	

2. La longitud de una circunferencia es $\frac{10\pi}{7}$ cm y otra circunferencia, concéntrica con la primera, tiene una longitud de $\frac{6\pi}{5}$ cm. Calcular el área del anillo circular que forman.

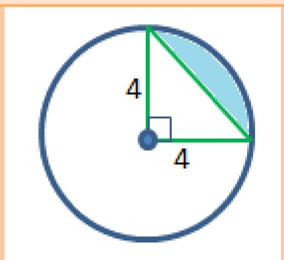
Solución

A	Se calcula el radio de la primera circunferencia.	$\frac{10\pi}{7} = 2\pi r_1$ $\Rightarrow \frac{5}{7} = r_1$

B	Se calcula el radio de la segunda circunferencia.	$\frac{6\pi}{5} = 2\pi r_2$ $\Rightarrow \frac{3}{5} = r_2$
C	Se calcula el área del anillo circular.	$A = \pi\left(\left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right)$ $\Rightarrow A = \frac{184\pi}{1225}$
D	Por lo tanto, el área del anillo circular es $\frac{184\pi}{1225}\ \text{cm}^2$.	

3. En un círculo con radio de $4\ \text{cm}$ se tiene un segmento circular determinado por un ángulo central que mide $90°$. Calcular el área del segmento circular.

Solución

A	Se calcula primero el área del sector circular.	$A_1 = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 90°}{360°}$ $\Rightarrow A_1 = 4\pi$
B	Como el ángulo central mide $90°$ entonces el triángulo que se forma es rectángulo y se calcula su área.	 $A_2 = \frac{4 \cdot 4}{2}$ $\Rightarrow A_2 = 8$
C	Finalmente se calcula el área del segmento circular.	$A_{segmento} = 4\pi - 8$
D	Por lo tanto, el área del segmento circular mide $(4\pi - 8)\ \text{cm}^2$.	

Ejercicios

1. Dos circunferencias son concéntricas y el radio de la mayor es el doble del radio de la menor. Si la suma de sus radios es 12 cm y ambas determinan un trapecio circular con área $2\pi\text{ cm}^2$, calcule la medida del ángulo central que determina el trapecio.

2. Calcule el área del segmento circular con radio de 10 cm y ángulo central de $60°$.

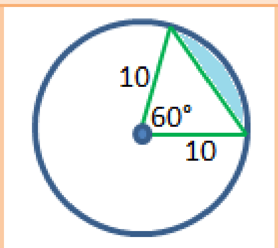
3. Un sector circular con una longitud de arco de 6 cm tiene un área de 24 cm^2. Calcule el área y el perímetro del círculo correspondiente.

Soluciones

1.

A	El radio de la circunferencia mayor mide el doble del radio de la circunferencia menor.	$R = 2r$
B	Se calculan las longitudes de los radios.	$12 = R + r$ $\Rightarrow 12 = 2r + r$ $\Rightarrow 4 = r$ $\Rightarrow 8 = R$
C	Ahora se busca la medida del ángulo central.	$2\pi = \dfrac{\pi\left(8^2 - 4^2\right)\alpha}{360°}$ $\Rightarrow 15° = \alpha$
D	Por lo tanto, el ángulo central que determina el trapecio circular mide $15°$.	

2.

A	Se calcula primero el área del sector circular.	$A_1 = \dfrac{\pi \cdot 10^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ}$ $\Rightarrow A_1 = \dfrac{50\pi}{3}$
B	Como el ángulo central mide 60° entonces el triángulo que se forma es equilátero y se calcula su área.	 $A_2 = \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4}$ $\Rightarrow A_2 = 25\sqrt{3}$
C	Finalmente se calcula el área del segmento circular.	$A_{segmento} = \dfrac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3}$
D	Por lo tanto, el área del segmento circular mide $\left(\dfrac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$.	

3.

A	Se calcula el radio de la circunferencia.	$24 = \dfrac{r \cdot 6}{2}$ $\Rightarrow 8 = r$
B	Se calcula el área del círculo.	$A = \pi \cdot 8^2$ $\Rightarrow A = 64\pi$
C	Ahora se calcula el perímetro del círculo, que corresponde a la longitud de la circunferencia.	$C = 2\pi \cdot 8$ $\Rightarrow C = 16\pi$
D	Por lo tanto, el área del círculo mide $64\pi\ \text{cm}^2$ y su perímetro mide $16\pi\ \text{cm}$.	