FUNCIONES NO POLINOMIALES

Ejemplos

1. Identifique cuáles de las siguientes funciones no son polinomiales y clasifíquelas en racionales o radicales según corresponda.

a) $f(x) = 3x^2 + \sqrt{5}$

b) $g(x) = \dfrac{2x+1}{3x^2-8}$

c) $h(x) = \sqrt[3]{5x-7}$

d) $g(x) = \dfrac{6x-5x^3+1}{7}$

e) $h(x) = \dfrac{4}{3\sqrt{x-2}}$

f) $f(x) = \dfrac{9x-2}{x}$

Solución

A	Es una función polinomial de grado 2.
B	Es una función no polinomial. Es una función racional, ya que es de la forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.
C	Es una función no polinomial. Es una función radical.
D	Es una función polinomial de grado 3.
E	Es una función no polinomial. Es una función radical.
F	Es una función no polinomial. Es una función racional, ya que es de la forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

2. Para la función dada por $g(x)=\begin{cases}-3x+1 & \text{si} \quad x\le -2\\ 2x-1 & \text{si} \quad x>-2\end{cases}$, realice lo siguiente:

a) Determine el dominio máximo.
b) Halle los puntos de intersección con el eje X.
c) Halle el punto de intersección con el eje Y.
d) Defina los intervalos de monotonía.

Solución

A	El criterio de la función está formado por dos expresiones polinomiales lineales y está definido para todos los valores de $\mathbb{R}$, eso permite determinar que su dominio máximo es el conjunto de los números reales.	$\mathbb{R}$
B	Para determinar la intersección de la gráfica de la función con el eje X es necesario saber para qué valores de x la imagen es 0. Para esto se resuelve $g(x)=0$ en las dos partes en que se definió el criterio de la función:	$g(x)=-3x+1$ $\Rightarrow -3x+1=0$ $\Rightarrow -3x=-1$ $\Rightarrow x=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{3},0\right)$ Este punto no se toma en cuenta porque este criterio se aplica solamente si $x\le -2$. $g(x)=2x-1$ $\Rightarrow 2x-1=0$ $\Rightarrow 2x=1$ $\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2},0\right)$ Este es el punto de intersección con el eje X.

C	Para determinar la intersección de la gráfica de la función con el eje Y se busca la imagen de 0; es decir se calcula $g(0)$. Como $0 > -2$, es necesario usar la parte de la función para la cual el dominio es el intervalo $x > -2$.	$g(x) = 2x - 1 \quad \text{si} \quad x > -2$ $\Rightarrow g(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ $\Rightarrow (0, -1)$ Este es el punto de intersección con el eje Y.
D	La monotonía se analiza en cada uno de los intervalos en los cuales está definida la función.	En el intervalo $]-\infty, -2]$ la función se define como $g(x) = -3x + 1$. Como la pendiente de esta función es -3, que es menor que 0, entonces en este intervalo la función es estrictamente decreciente. En el intervalo $]-2, +\infty[$ la función se define como $g(x) = 2x - 1$. Como la pendiente de esta función es 2, que es mayor que 0, entonces en este intervalo la función es estrictamente creciente.

3. Determine el dominio máximo de la función $h(x)=\dfrac{\sqrt[4]{(1-x)(x-2)}}{\sqrt[3]{x^2-x}}$.

Solución

<table>
<tr>
<td>A</td>
<td>La raíz del numerador es de índice par, por lo cual se debe garantizar que el subradical sea mayor o igual que 0, para lo cual se puede hacer la tabla de signos correspondiente.</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$(1-x)$</td><td>$+$</td><td>$\bullet$ $-$</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$(x-2)$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$\bullet$ $+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$(1-x)(x-2)$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$-$</td><td></td></tr>
</table>
Esto proporciona el intervalo $[-1,2]$
</td>
</tr>
<tr>
<td>B</td>
<td>La raíz del denominador es de índice impar, de modo que el subradical puede ser positivo o negativo, pero no puede ser igual a 0.</td>
<td>$x^2-x=0$
$\Rightarrow x(x-1)=0$
$\Rightarrow x=0 \quad \text{o} \quad x=1$</td>
</tr>
<tr>
<td>C</td>
<td>Esto permite determinar el dominio máximo de la función.</td>
<td>$D_h=[-1,2]-\{0,1\}$</td>
</tr>
</table>

4. Determine cuáles de las siguientes funciones no polinomiales tienen dominio máximo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^4+3}$

b) $g(x) = \sqrt[5]{3x-9}$

c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3}$

d) $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2-x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

e) $h(x) = \dfrac{\sqrt[7]{x}}{x+3}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$

Solución

A	En la función racional $f(x) = \dfrac{x+4}{x^4+3}$ su dominio máximo está formado por todos los números reales tales que $x^4+3 \neq 0$. Pero la expresión x^4+3 es positiva para cualquier valor de x.	Dominio máximo $\mathbb{R}$.
B	La función radical $g(x) = \sqrt[5]{3x-9}$ tiene índice impar por lo cual el valor del subradical puede ser cero, positivo o negativo.	Dominio máximo $\mathbb{R}$.
C	La función radical $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3}$ tiene índice par, por lo cual su dominio máximo está formado por todos los números reales tales que $x^2+2 \geq 0$. Pero la expresión x^2+2 es positiva para cualquier valor de x.	Dominio máximo $\mathbb{R}$.
D	La función $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2-x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ está definida en dos intervalos diferentes $]-\infty, 2[$ y $[2, +\infty[$ los cuales incluyen a todos los números reales.	Dominio máximo $\mathbb{R}$.

E	En el numerador de la función $h(x)=\frac{\sqrt[7]{x}}{x+3}$ se tiene un radical de índice impar, de modo que el subradical puede ser cero, positivo o negativo. Pero es importante que el denominador sea diferente de 0, es decir, $x \neq -3$. Eso significa que su do minio máximo es $\mathbb{R}-\{-3\}$.	No tiene dominio máximo $\mathbb{R}$.
F	La función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$ está definida en dos intervalos diferentes $[0,+\infty[$ y $]-1,0[$ los cuales no incluyen a todos los números reales, de modo que su dominio máximo sería el intervalo $]-1,+\infty[$.	No tiene dominio máximo $\mathbb{R}$.

Ejercicios

1. Asocie cada función de la columna de la izquierda con su dominio máximo en la columna de la derecha, escribiendo dentro del paréntesis la letra correspondiente.

A	$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$	( )	$\mathbb{R}$
B	$g(x)=\sqrt{x^2+1}$	( )	$\mathbb{R}-\{-1,0\}$
C	$h(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$	( )	$\mathbb{R}-\{\pm 1\}$
D	$g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$	( )	$\mathbb{R}-\{1\}$
E	$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$	( )	$\mathbb{R}-\{0\}$
F	$h(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}}$	( )	$\mathbb{R}-\{-1\}$

2. Para la función dada por $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+2 & \text{si} \quad x\leq -1 \\ x+3 & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$, realice lo siguiente:

   a. Determine el dominio máximo.
   b. Halle los puntos de intersección con el eje X.
   c. Halle el punto de intersección con el eje Y.
   d. Defina los intervalos de monotonía.

3. Identifique cuáles de las siguientes funciones no son polinomiales y clasifíquelas en racionales o radicales según corresponda.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{x+1}$

b) $g(x) = \sqrt[3]{5x^2+3}$

c) $h(x) = \dfrac{2x+3}{5}$

d) $g(x) = \dfrac{4x^2+3x-2}{5x-9}$

e) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-9x^2}}$

f) $f(x) = 4x^4 - 1$

4. Asocie cada función de la columna de la izquierda con su punto de intersección con el eje Y en la columna de la derecha, escribiendo dentro del paréntesis la letra correspondiente.

A	$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x<5 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases}$	( )	$(0,4)$
B	$g(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<-3 \\ 5x^2+2 & \text{si} \quad x \geq -3 \end{cases}$	( )	$(0,1)$
C	$h(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x>0 \\ -2x+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$	( )	$(0,-3)$
D	$h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x<-1 \\ 5x-3 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$	( )	$(0,2)$

5. Encuentre el dominio máximo de la función $h(x) = \dfrac{\sqrt[6]{2x^2-3x-2}}{\sqrt{x^2+8x+15}}$.

Soluciones

1.

A	$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ Es una función racional en la cual se debe garantizar: $x^2-1\neq 0$ $\Rightarrow x^2\neq 1$ $\Rightarrow x\neq \pm 1$	(B)	$\mathbb{R}$
B	$g(x)=\sqrt{x^2+1}$ Es una función radical de índice par en la cual para todo número real se cumple $x^2+1>0$.	(E)	$\mathbb{R}-\{-1,0\}$
C	$h(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ Es una función racional en la cual se debe garantizar: $x^2\neq 0$ $\Rightarrow x\neq 0$	(A)	$\mathbb{R}-\{\pm 1\}$
D	$g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$ En el numerador se tiene un radical de índice impar definido para todos los números reales, pero se debe garantizar que: $x+1\neq 0$ $\Rightarrow x\neq -1$	(F)	$\mathbb{R}-\{1\}$
E	$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$ Es una función racional en la cual se debe garantizar: $x^2+x\neq 0$ $\Rightarrow x(x+1)\neq 0$ $\Rightarrow x\neq 0 \quad \wedge \quad x\neq -1$	(C)	$\mathbb{R}-\{0\}$

F	$$h(x)=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}}$$ En el denominador se tiene un radical de índice impar, por lo cual el subradical puede ser negativo o positivo, pero se debe garantizar: $x-1\neq 0$ $\Rightarrow x\neq 1$	(D)	$\mathbb{R}-\{-1\}$

2.

A	El criterio de la función está formado por dos expresiones polinomiales y está definido para todos los valores de $\mathbb{R}$, eso permite determinar que su dominio máximo es el conjunto de los números reales.	$\mathbb{R}$
B	Para determinar la intersección de la gráfica de la función con el eje X es necesario saber para qué valores de x la imagen es 0. Para esto se resuelve $f(x)=0$ en las dos partes en que se definió el criterio de la función.	$f(x)=x+3$ $\Rightarrow x+3=0$ $\Rightarrow x=-3$ $\Rightarrow (-3,0)$ Este punto no se toma en cuenta porque este criterio se aplica solamente si $x>-1$. $f(x)=x^2+3x+2$ $\Rightarrow x^2+3x+2=0$ $\Rightarrow (x+2)(x+1)=0$ $\Rightarrow x=-2 \quad \vee \quad x=-1$ $\Rightarrow (-2,0),\ (-1,0)$ Estos son los puntos de intersección con el eje X.
C	Para determinar la intersección de la gráfica de la función con el eje Y se busca la imagen de 0; es decir se calcula $f(0)$. Como $0>-1$, es necesario usar la parte de la función para la cual el dominio es el intervalo $x>-1$.	$f(x)=x+3 \quad \text{si} \quad x>-1$ $\Rightarrow g(0)=0+3=3$ $\Rightarrow (0,3)$ Este es el punto de intersección con el eje Y.

D	La monotonía se analiza en cada uno de los dos intervalos en los cuales está definida la función.	En el intervalo $\left]-\infty,-1\right]$ la función se define como $f\left(x\right)=x^2+3x+2$ cuyo punto vértice es $\left(\frac{-3}{2},\frac{-1}{4}\right)$. Esto significa que la función es estrictamente decreciente en el intervalo $\left]-\infty,\frac{-3}{2}\right]$ y estrictamente creciente en el intervalo $\left]\frac{-3}{2},-1\right]$. En el intervalo $\left]-1,+\infty\right[$ la función se define como $f\left(x\right)=x+3$. Como la pendiente de esta función es 1, que es mayor que 0, entonces en este intervalo la función es estrictamente creciente.

3.

A	Es una función no polinomial. Es una función racional, ya que es de la forma $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.
B	Es una función no polinomial. Es una función radical.
C	Es una función polinomial de grado 1, es decir, es lineal.
D	Es una función no polinomial. Es una función racional, ya que es de la forma $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.
E	Es una función no polinomial. Es una función radical.
F	Es una función polinomial de grado 4.

4.

A	$f(x)=\begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x<5 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x\geq 5\end{cases}$ $f(0)=0+4=4\Rightarrow(0,4)$	(A)	$(0,4)$
B	$g(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x<-3 \\ 5x^2+2 & \text{si} \quad x\geq -3\end{cases}$ $g(0)=5\cdot 0^2+2=2\Rightarrow(0,2)$	(C)	$(0,1)$
C	$h(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x>0 \\ -2x+1 & \text{si} \quad x\leq 0\end{cases}$ $h(0)=-2\cdot 0+1=1\Rightarrow(0,1)$	(D)	$(0,-3)$
D	$h(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x<-1 \\ 5x-3 & \text{si} \quad -1\leq x<1 \\ x-1 & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$ $h(0)=5\cdot 0-3=-3\Rightarrow(0,-3)$	(B)	$(0,2)$

5. $h(x)=\dfrac{\sqrt[6]{2x^2-3x-2}}{\sqrt{x^2+8x+15}}$

<table>
<tr>
<td>A</td>
<td>La raíz del numerador es de índice par, por lo cual se debe garantizar que el subradical sea mayor que 0, para lo cual se debe hacer la tabla de signos correspondiente.</td>
<td>

$\sqrt[6]{2x^2-3x-2}=\sqrt[6]{(2x+1)(x-2)}$

<table>
<tr><th></th><th>$-\infty$ … $-\frac{1}{2}$</th><th>$-\frac{1}{2}$ … 2</th><th>2 … $+\infty$</th></tr>
<tr><td>$(2x+1)$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$(x-2)$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$(2x+1)(x-2)$</td><td>$+$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
</table>

Esto proporciona los intervalos $\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

</td>
</tr>
<tr>
<td>B</td>
<td>La raíz del denominador es de índice par, por lo cual hay que garantizar que el subradical sea mayor que 0, para lo cual se debe hacer la tabla de signos correspondiente.</td>
<td>

$\sqrt{x^2+8x+15}=\sqrt{(x+5)(x+3)}$

<table>
<tr><th></th><th>$-\infty$ … -5</th><th>-5 … -3</th><th>-3 … $+\infty$</th></tr>
<tr><td>$(x+5)$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$(x+3)$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$(x+5)(x+3)$</td><td>$+$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
</table>

Esto proporciona los intervalos $\left]-\infty,-5\right[\cup\left]-3,+\infty\right[$

</td>
</tr>
<tr>
<td>C</td>
<td>Esto permite determinar el dominio máximo de la función buscando la intersección de los intervalos encontrados en cada caso.</td>
<td>

$\left(\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right]\cup\left[2,+\infty\right[\right)\cap\left(\left]-\infty,-5\right[\cup\left]-3,+\infty\right[\right)$

$D_h=\left]-\infty,-5\right[\cup\left]-3,\frac{-1}{2}\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

</td>
</tr>
</table>