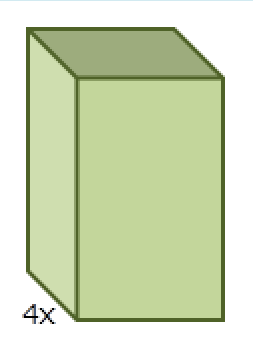
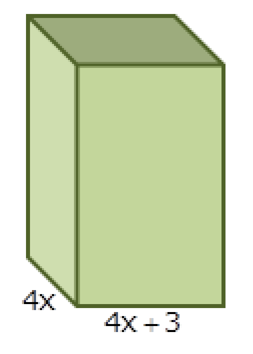
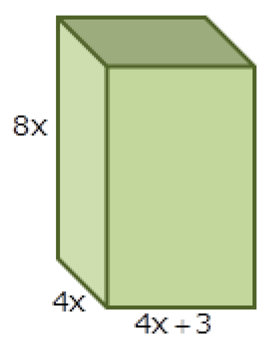
FUNCIONES POLINOMIALES DE GRADO MAYOR QUE 2

Ejemplos

1. Un prisma rectangular tiene una base cuyo ancho mide $4x$ y su largo mide 3 unidades más que el ancho. La altura del prisma equivale al doble del ancho de su base. Exprese el volumen del prisma como una función de x y verifique que se trata de una función de grado mayor que 2.

Solución

<table>
<tr><td>A</td><td>El ancho de la base del prisma mide $4x$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>B</td><td>El largo de la base del prisma mide 3 unidades más que el ancho.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>C</td><td>La altura del prisma mide el doble del ancho de su base.</td><td>
</td></tr>
</table>

D	El volumen del prisma es equivalente al área de la base por la altura.	$V(x) = 4x \cdot (4x+3) \cdot 8x$ $= (16x^2 + 12x) \cdot 8x$ $= 128x^3 + 96x^2$
E	Se trata de una función polinomial de grado 3.	$V(x) = 128x^{3} + 96x^2$

2. Encuentre los ceros de la función $g(x) = 2x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x$.

Solución

A	Los ceros de una función corresponden a los valores de la variable independiente en los cuales la imagen es cero.	$g(x) = 0$ $\Rightarrow 2x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x = 0$
B	Se factoriza primero por el método de factor común. y luego por agrupación de términos.	$x(2x^3 - x^2 + 6x - 3) = 0$
C	Ahora se factoriza usando el método de agrupación de términos.	$x\left[(2x^3 - x^2) + (6x - 3)\right] = 0$ $x\left[x^2(2x-1) + 3(2x-1)\right] = 0$ $x(2x-1)(x^2+3) = 0$
D	La función tiene dos ceros.	$x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{2}$

3. Determine cuáles de las siguientes funciones son polinomiales de grado mayor que 2.

a. $g(x) = \dfrac{2x-1}{3}$

b. $f(x) = \dfrac{4x^4 - 2x + 1}{3}$

c. $k(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 4x + 1}$

d. $s(x) = \dfrac{5 - x^6}{x}$

e. $f(x) = (x^3 + 2x)^2$

Solución

A	Se trata de una función lineal, es decir, es polinomial pero no es de grado mayor que 2.	$g(x) = \frac{2x-1}{3} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$
B	Sí es polinomial de grado mayor que 2, su grado es 4.	$f(x) = \frac{4x^4 - 2x + 1}{3} = \frac{4x^4}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$
C	Es una función radical, no es polinomial.	$k(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 4x + 1}$
D	Es una función fraccionaria, no es polinomial.	$s(x) = \frac{5 - x^6}{x}$
E	Sí es polinomial de grado mayor que 2, su grado es 6.	$f(x) = (x^3 + 2x)^2 = x^6 + 4x^4 + 4x^2$

Ejercicios

1. Un cilindro circular recto tiene un radio que mide $3x$ y su altura mide 4 unidades más que el radio. Exprese el volumen del cilindro como una función de x y verifique que se trata de una función de grado mayor que 2.

2. Encuentre una función polinomial de grado 4 que tenga únicamente dos ceros reales en los valores $x = \frac{2}{3}$, $x = -2$.

3. Determine cuáles de las siguientes funciones son polinomiales de grado mayor que 2.

a. $f(x) = \dfrac{4}{2x^3 + 6}$

b. $g(x) = \left(5x^2 - x^5 + 4\right)^{1/2}$

c. $f(x) = \dfrac{(x+2)(x^2+1)}{3}$

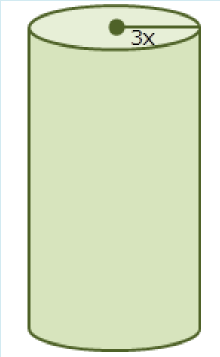
d. $h(x) = 2x - 4 + x^5$

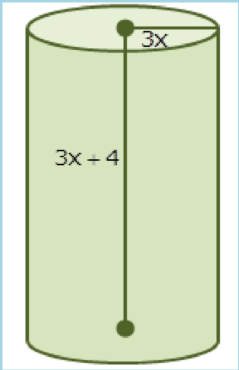
e. $k(x) = \dfrac{(2x^4 - 1)^2}{5}$

4. Encuentre los ceros de la función $h(x) = 2x^4 + x^3 - 13x^2 - 21x - 9$.

Soluciones

1.

A	El radio del cilindro mide $3x$	

B	La altura mide 4 unidades más que el radio.	
D	El volumen del cilindro es equivalente al área de la base por la altura.	$V(x) = \pi(3x)^2 \cdot (3x+4)$ $= 9\pi x^2 \cdot (3x+4)$ $= 27\pi x^3 + 36\pi x^2$
E	Se trata de una función polinomial de grado 3.	$V(x) = 27\pi x^3 + 36\pi x^2$

2.

A	Cada uno de los ceros define un factor de la función polinomial.	$(3x-2)(x+2)$ $= 3x^2 + 6x - 2x - 4$ $= 3x^2 + 4x - 4$
B	Para que tenga grado 4 es necesario multiplicarlo por un factor de grado 2 que no tenga ceros reales, por ejemplo (x^2+2).	$(3x^2+4x-4)(x^2+2)$ $= 3x^4 + 6x^2 + 4x^3 + 8x - 4x^2 - 8$ $= 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 8x - 8$
C	Ahora se puede dar una posible función polinomial con estas características.	$g(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 8x - 8$

3.

A	Se trata de una función racional, es decir, no es polinomial de grado mayor que 2.	$f(x) = \dfrac{4}{2x^3+6}$

B	Es una función radical, es decir, no es polinomial de grado mayor que 2.	$g(x)=\left(5x^2-x^5+4\right)^{1/2}$
C	Sí es una función polinomial de grado mayor que 2, su grado es 3.	$f(x)=\dfrac{(x+2)(x^2+1)}{3}$ $=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{2x^2}{3}+\dfrac{2}{3}$
D	Sí es una función polinomial de grado mayor que 2, su grado es 5.	$h(x)=2x-4+x^5$
E	Sí es polinomial de grado mayor que 2, su grado es 8.	$k(x)=\dfrac{\left(2x^4-1\right)^2}{5}=\dfrac{4x^8}{5}-\dfrac{4x^4}{5}-\dfrac{1}{5}$

4.

A	Los ceros de una función corresponden a los valores de la variable independiente en los cuales la imagen es cero.	$h(x)=0$ $\Rightarrow 2x^4+x^3-13x^2-21x-9=0$
B	Se factoriza primero por el método de división sintética, usando el hecho de que 3 es uno de los ceros del polinomio.	$2\cdot 3^4+3^3-13\cdot 3^2-21\cdot 3-9=0$ $\begin{array}{ccccc\|c} 2 & 1 & -13 & -21 & -9 & 3 \\ & 6 & 21 & 24 & 9 & \\ \hline 2 & 7 & 8 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$ $(x-3)\left(2x^3+7x^2+8x+3\right)=0$
C	Se factoriza nuevamente por el método de división sintética, usando el hecho de que -1 es uno de los ceros del polinomio.	$2\cdot(-1)^4+(-1)^3-13\cdot(-1)^2-21\cdot(-1)-9=0$

		$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & 7 & 8 & 3 & -1 \\ & -2 & -5 & -3 & \\ \hline 2 & 5 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$ $$(x-3)(x+1)\left(2x^2+5x+3\right)=0$$
D	Finalmente se factoriza por el método de inspección.	$$(x-3)(x+1)(x+1)(2x+3)=0$$ $$\Rightarrow (x-3)(x+1)^2(2x+3)=0$$
E	La función tiene tres ceros.	$$x=3,\quad x=-1,\quad x=\frac{-3}{2}$$