FUNCIÓN INVERSA

Ejemplos

1. Asocie cada función de la columna de la izquierda con su respectiva función inversa en la columna de la derecha, escribiendo dentro del paréntesis la letra correspondiente. Todas las funciones van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

A	$y = \dfrac{2x+1}{3}$	( )	$y = \dfrac{2x+1}{3}$
B	$y = \dfrac{3x-1}{2}$	( )	$y = \dfrac{3x+1}{2}$
C	$y = \dfrac{1-2x}{3}$	( )	$y = \dfrac{3x-1}{2}$
D	$y = \dfrac{2x-1}{3}$	( )	$y = \dfrac{2x-1}{3}$
E	$y = \dfrac{1+3x}{2}$	( )	$y = \dfrac{1-3x}{2}$

Solución

A	$y = \dfrac{2x+1}{3}$ $\Rightarrow 3y = 2x+1$ $\Rightarrow 3y-1 = 2x$ $\Rightarrow \dfrac{3y-1}{2} = x$ $\Rightarrow y = \dfrac{3x-1}{2}$	(B)	$y = \dfrac{2x+1}{3}$

B	$y=\dfrac{3x-1}{2}$ $\Rightarrow 2y=3x-1$ $\Rightarrow 2y+1=3x$ $\Rightarrow \dfrac{2y+1}{3}=x$ $\Rightarrow y=\dfrac{2x+1}{3}$	(D)	$y=\dfrac{3x+1}{2}$
C	$y=\dfrac{1-2x}{3}$ $\Rightarrow 3y=1-2x$ $\Rightarrow 2x=1-3y$ $\Rightarrow x=\dfrac{1-3y}{2}$ $\Rightarrow y=\dfrac{1-3x}{2}$	(A)	$y=\dfrac{3x-1}{2}$
D	$y=\dfrac{2x-1}{3}$ $\Rightarrow 3y=2x-1$ $\Rightarrow 3y+1=2x$ $\Rightarrow \dfrac{3y+1}{2}=x$ $\Rightarrow y=\dfrac{3x+1}{2}$	(E)	$y=\dfrac{2x-1}{3}$
E	$y=\dfrac{1+3x}{2}$ $\Rightarrow 2y=1+3x$ $\Rightarrow 2y-1=3x$ $\Rightarrow \dfrac{2y-1}{3}=x$ $\Rightarrow y=\dfrac{2x-1}{3}$	(C)	$y=\dfrac{1-3x}{2}$

2. Calcule el valor de $h(2)+h^{-1}(-27)$ para la función biyectiva $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=(x+1)^3$.

Solución

A	Se busca el criterio de la función inversa.	$y=(x+1)^3$ $\Rightarrow \sqrt[3]{y}=x+1$ $\Rightarrow \sqrt[3]{y}-1=x$ $\Rightarrow h^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}-1$
B	Se calculan ambas imágenes para encontrar el valor solicitado.	$h(2)+h^{-1}(-27)$ $=(2+1)^3+\sqrt[3]{-27}-1$ $=27-3-1$ $=23$

3. Considere la función biyectiva $f:\left[-2,\frac{1}{4}\right]\to[a,b],\ f(x)=\frac{3}{4}x-2$, encuentre el dominio de su función inversa $f^{-1}(x)$.

Solución

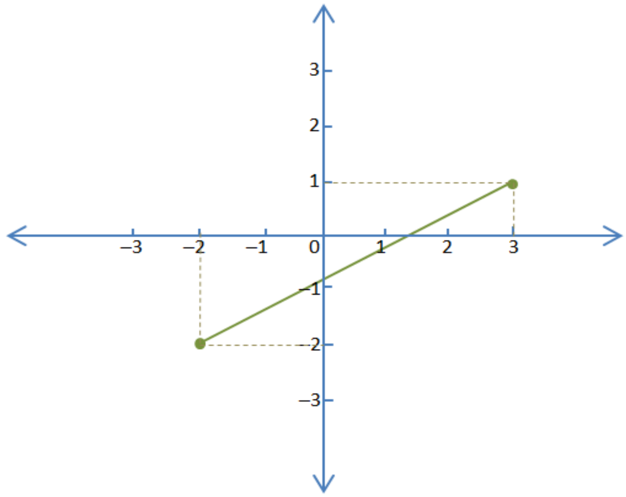
A	Se calculan las imágenes de los extremos del intervalo que corresponde al dominio de $f(x)$.	$f(-2)=\frac{3}{4}\cdot -2-2=\frac{-7}{2}$ $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}-2=\frac{-29}{16}$
B	Así se encuentra el codominio de la función.	$f:\left[-2,\frac{1}{4}\right]\to\left[\frac{-7}{2},\frac{-29}{16}\right]$
C	Ahora se encuentra el dominio de la función inversa.	$f^{-1}:\left[\frac{-7}{2},\frac{-29}{16}\right]\to\left[-2,\frac{1}{4}\right]$ $\Rightarrow D_{f^{-1}}=\left[\frac{-7}{2},\frac{-29}{16}\right]$

4. Sea $g(x)$ una función lineal cuya gráfica pasa por los puntos $\left(\frac{-2}{3},\frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{-11}{3},6\right)$. Encuentre el criterio de su inversa.

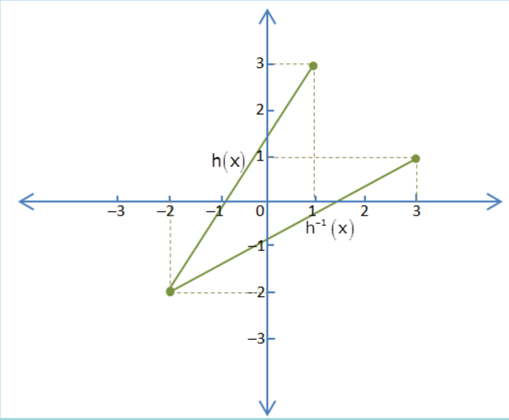
Solución

A	Para la función inversa los puntos se invierten.	$\left(\frac{3}{2},\frac{-2}{3}\right)$ y $\left(6,\frac{-11}{3}\right)$
B	Se calcula la pendiente.	$m=\dfrac{\frac{-11}{3}-\frac{-2}{3}}{6-\frac{3}{2}}=\frac{-2}{3}$
C	Ahora se usa uno de los puntos para encontrar la intersección.	$y=mx+b$ $\Rightarrow \frac{-2}{3}=\frac{-2}{3}\cdot\frac{3}{2}+b$ $\Rightarrow \frac{-2}{3}+1=b$ $\Rightarrow \frac{1}{3}=b$
D	Se da el criterio de la función inversa.	$g^{-1}(x)=\frac{-2}{3}x+\frac{1}{3}$

5. La gráfica adjunta representa la función $h^{-1}(x)$. Encuentre el criterio de $h(x)$ y grafíquela en el mismo eje de coordenadas.



Solución

A	Según la gráfica se tienen dos puntos para la función inversa.	$(-2,-2)$ y $(3,1)$
B	Para encontrar el criterio de la función se invierten los puntos.	$(-2,-2)$ y $(1,3)$
C	Se calcula la pendiente de la función.	$m=\frac{3+2}{1+2}=\frac{5}{3}$
D	Ahora se usa uno de los puntos para encontrar la intersección.	$y=mx+b$ $\Rightarrow 3=\frac{5}{3}\cdot 1+b$ $\Rightarrow 3-\frac{5}{3}=b$ $\Rightarrow \frac{4}{3}=b$
D	Se da el criterio de la función.	$h(x)=\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}$
E	Se traza la gráfica de $h(x)$.	

Ejercicios

1. Asocie cada función de la columna de la izquierda con su respectiva función inversa en la columna de la derecha, escribiendo dentro del paréntesis la letra correspondiente.

A	$f: [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ $f(x)=x^2+1$	( )	$f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$
B	$f:]-\infty,0] \to [-1,+\infty[$ $f(x)=x^2-1$	( )	$f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}$
C	$f: [0,+\infty[\to [-1,+\infty[$ $f(x)=x^2-1$	( )	$f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x}$
D	$f:]-\infty,0] \to]-\infty,1]$ $f(x)=1-x^2$	( )	$f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}$
E	$f:]-\infty,0] \to [1,+\infty[$ $f(x)=x^2+1$	( )	$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$

2. Para la función biyectiva $f:\left[\frac{-1}{2},1\right] \to [a,b]$ con $f(x)=4x^2+4x+1$ calcule el criterio y el dominio de su función inversa $f^{-1}(x)$.

3. Dada la función biyectiva $g(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{1}{4}$. Encuentre el criterio de su función inversa $g^{-1}(x)$.

4. Calcule el valor de $g(-1)+g^{-1}(1)$ para la función biyectiva $g(x)=\frac{4-x}{5}$.

Soluciones

1.

A	$f:[0,+\infty[\ \to [1,+\infty[$ $f(x)=x^2+1$ $\Rightarrow y=x^2+1$ $\Rightarrow y-1=x^2$ $\Rightarrow \sqrt{y-1}=x$ $\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$ Se toma la raíz positiva para que las imágenes de la función inversa pertenezcan al intervalo $[0,+\infty[$.	(C)	$f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$
B	$f:]-\infty,0]\to[-1,+\infty[$ $f(x)=x^2-1$ $\Rightarrow y=x^2-1$ $\Rightarrow y+1=x^2$ $\Rightarrow -\sqrt{y+1}=x$ $\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}$ Se toma la raíz negativa para que las imágenes de la función inversa pertenezcan al intervalo $]-\infty,0]$.	(B)	$f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}$
C	$f:[0,+\infty[\ \to[-1,+\infty[$ $f(x)=x^2-1$ $\Rightarrow y=x^2-1$ $\Rightarrow y+1=x^2$ $\Rightarrow \sqrt{y+1}=x$ $\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$	(D)	$f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x}$

	Se toma la raíz positiva para que las imágenes de la función inversa pertenezcan al intervalo $\left[0,+\infty\right[$.		
D	$f:\left]-\infty,0\right]\rightarrow\left]-\infty,1\right]$ $f(x)=1-x^2$ $\Rightarrow y=1-x^2$ $\Rightarrow x^2=1-y$ $\Rightarrow x=\sqrt{1-y}$ $\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{1-x}$ Se toma la raíz negativa para que las imágenes de la función inversa pertenezcan al intervalo $\left]-\infty,0\right]$.	(E)	$f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}$
E	$f:\left]-\infty,0\right]\rightarrow\left[1,+\infty\right[$ $f(x)=x^2+1$ $\Rightarrow y=x^2+1$ $\Rightarrow y-1=x^2$ $\Rightarrow -\sqrt{y-1}=x$ $\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}$ Se toma la raíz negativa para que las imágenes de la función inversa pertenezcan al intervalo $\left]-\infty,0\right]$.	(A)	$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$

2.

A	Se calculan las imágenes de los extremos del intervalo que corresponde al dominio de la función.	$f\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+1=0$ $f(1)=4\cdot 1^2-4\cdot 1+1=1$
B	Así se encuentra el codominio de la función.	$f:\left[\frac{1}{2},1\right]\rightarrow[0,1]$
C	Esto permite encontrar el dominio de la inversa.	$f^{-1}:[0,1]\rightarrow\left[\frac{1}{2},1\right]$ $\Rightarrow D_{f^{-1}}=[0,1]$
D	Se calcula el criterio de la inversa.	$f(x)=4x^2-4x+1=(2x-1)^2$ $\Rightarrow y=(2x-1)^2$ $\Rightarrow \sqrt{y}=2x-1$ $\Rightarrow \sqrt{y}+1=2x$ $\Rightarrow \frac{\sqrt{y}+1}{2}=x$ $\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{2}$

3.

A	Se despeja para encontrar el criterio de la función inversa.	$g(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{1}{4}$ $\Rightarrow y=\frac{5}{2}x^3-\frac{1}{4}$ $\Rightarrow y+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}x^3$ $\Rightarrow \frac{4y+1}{4}=\frac{5}{2}x^3$

		$\Rightarrow \frac{2}{5}\cdot\frac{4y+1}{4} = x^3$ $\Rightarrow \frac{4y+1}{10} = x^3$ $\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{4y+1}{10}} = x$
B	Ahora se tiene el criterio de la inversa.	$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{4x+1}{10}}$

4.

A	Se busca el criterio de la función inversa.	$g(x) = \frac{4-x}{5}$ $\Rightarrow y = \frac{4-x}{5}$ $\Rightarrow 5y = 4 - x$ $\Rightarrow x = 4 - 5y$ $\Rightarrow g^{-1}(x) = 4 - 5x$
B	Se calculan ambas imágenes para encontrar el valor solicitado.	$g(-1) + g^{-1}(1)$ $= \frac{4-1}{5} + 4 - 5\cdot 1$ $= \frac{3}{5} - 1$ $= \frac{-2}{5}$