FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Ejemplos

1. En la columna de la derecha aparecen funciones exponenciales. Escriba la letra correspondiente dentro del paréntesis según se trate de una función creciente o decreciente.

A	Creciente	( )	$f(x)=\left(\frac{7}{4}\right)^{x}$
		( )	$g(x)=(1,03)^{x}$
		( )	$h(x)=\left(\frac{5}{8}\right)^{x}$
B	Decreciente	( )	$k(x)=(0,47)^{x}$
		( )	$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$
		( )	$t(x)=\left(\frac{9}{5}\right)^{-x}$

Solución

A	Creciente	(A)	$f(x)=\left(\frac{7}{4}\right)^{x}$ $\frac{7}{4}>1$
		(A)	$g(x)=(1,03)^{x}$ $1,03>1$
		(B)	$h(x)=\left(\frac{5}{8}\right)^{x}$ $0<\frac{5}{8}<1$

B	Decreciente	(B)	$k(x)=(0,47)^{x}$ $0<0,47<1$
		(A)	$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ $\frac{3}{2}>1$
		(B)	$t(x)=\left(\frac{9}{5}\right)^{-x}=\left(\frac{5}{9}\right)^{x}$ $0<\frac{5}{9}<1$

2. En la columna de la derecha aparecen funciones logarítmicas. Escriba la letra correspondiente dentro del paréntesis según se trate de una función creciente o decreciente.

A	Creciente	( )	$g(x)=\log_{\frac{3}{2}} x$
		( )	$t(x)=\log_{\frac{2}{5}} x$
		( )	$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$
B	Decreciente	( )	$s(x)=\log_{0,24} x$
		( )	$h(x)=\log x$
		( )	$k(x)=\log_{\frac{4}{7}} x$

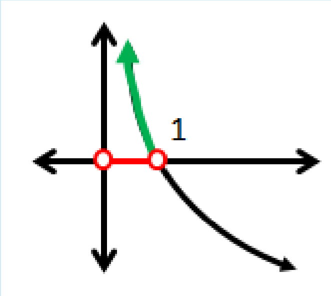
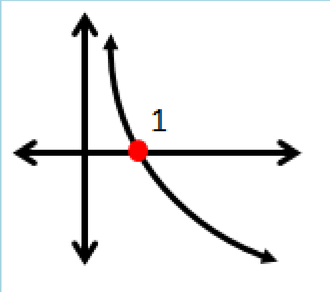
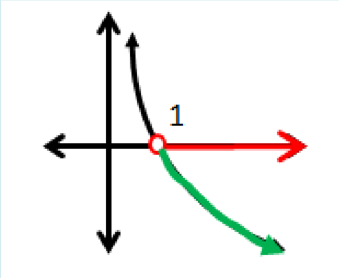
Solución

A	Creciente	(A)	$g(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$ $\frac{3}{2} > 1$
		(B)	$t(x) = \log_{\frac{2}{5}} x$ $0 < \frac{2}{5} < 1$
		(B)	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ $0 < \frac{1}{2} < 1$
B	Decreciente	(B)	$s(x) = \log_{0,24} x$ $0 < 0,24 < 1$
		(A)	$h(x) = \log x$ $10 > 1$
		(B)	$k(x) = \log_{\frac{4}{7}} x$ $0 < \frac{4}{7} < 1$

3. Para $y = \log_k x$, $0 < k < 1$, $x \in \mathbb{R}^+$, determine cuáles de las siguientes proposiciones son correctas:

a. $y > 0$ si $x < 1$
b. $y = 0$ si $x = 1$
c. $y < 0$ si $x > 1$

Solución

A	Es correcta, las imágenes son positivas cuando $x < 1$.	
B	Es correcta, la imagen de 1 es 0.	
C	Es correcta, las imágenes son negativas cuando $x > 1$.	

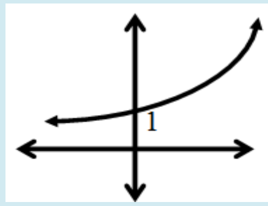
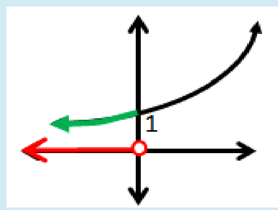
4. Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ con $f(x) = 2^{x}$, determine cuáles de las siguientes proposiciones son correctas:

a. $f\left(\frac{1}{3}\right) > f(3)$

b. $f(x) < 1$ si $x < 0$

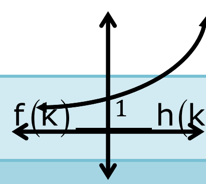
c. $f(-4) < f(-1)$

Solución

	Como $f(x) = 2^x$ y $2 > 1$, entonces la función es creciente. 
A	Es incorrecta porque $\frac{1}{3} < 3 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) < f(3)$.
C	Es correcta, las imágenes son menores que 1 cuando $x < 0$. 
D	Es correcta porque $-4 < -1 \Rightarrow f(-4) < f(-1)$.

5. Considere las funciones $f(x) = \log_k x$, $h(x) = \log_{\frac{1}{k}} x$, $0 < k < 1$.

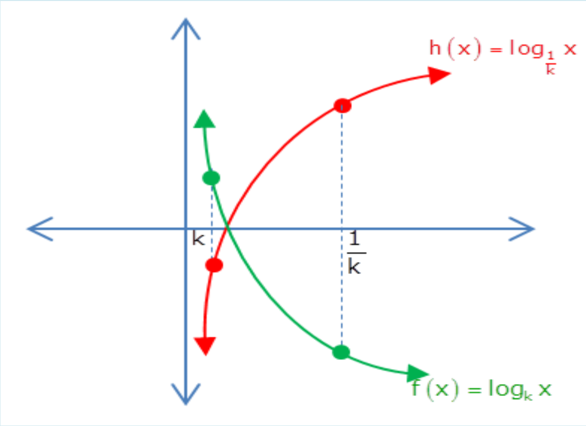
Escriba la letra correspondiente dentro del paréntesis para completar el espacio entre las imágenes de la columna de la derecha según corresponda a $>$ o $<$.



A	$>$	( )	$f(k)$ _____ $h(k)$
		( )	$f(k)$ _____ $f\left(\frac{1}{k}\right)$
B	$<$	( )	$f\left(\frac{1}{k}\right)$ _____ $h\left(\frac{1}{k}\right)$
		( )	$h(k)$ _____ $h\left(\frac{1}{k}\right)$

Solución

Se puede realizar cada comparación usando las gráficas respectivas de ambas funciones.



A	>	(A)	$f(k) > h(k)$
		(A)	$f(k) > f\left(\frac{1}{k}\right)$
B	<	(B)	$f\left(\frac{1}{k}\right) < h\left(\frac{1}{k}\right)$
		(B)	$h(k) < h\left(\frac{1}{k}\right)$

Ejercicios

1. Sean $x \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^-$, $b \neq -1$ identifique cuáles de las siguientes funciones corresponden a una función logarítmica.

a. $f(x) = \log_b x$

b. $g(x) = \log_{\frac{1}{b}} x$

c. $h(x) = \log_{-b} x$

d. $s(x) = \log_{\frac{-1}{b}} x$

2. Para la función exponencial $f(x) = k^{-x}$, $k > 1$ determine cuáles de las siguientes proposiciones son correctas.

a. $f(x) > 1$ si $x > 0$

b. $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right)$

c. $f(x) < 1$ si $x > 0$

d. $f(-2) > f(-1)$

3. En la columna de la derecha aparecen funciones exponenciales. Escriba la letra correspondiente dentro del paréntesis según se trate de una función cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

A	Cóncava hacia arriba	( )	$f(x) = \log_{\frac{3}{4}} x$
		( )	$g(x) = \log_8 x$
		( )	$h(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$
B	Cóncava hacia abajo	( )	$k(x) = \log_{\frac{4}{5}} x$
		( )	$s(x) = \log_{\frac{7}{3}} x$

		( )	$t(x)=\log_{1,6} x$

4. Considere las funciones $f(x)=a^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$, $h(x)=\log_a x$, $s(x)=\log_{\frac{1}{a}} x$ todas con $a>1$.

Escriba la letra correspondiente dentro del paréntesis para completar el espacio entre las imágenes de la columna de la derecha según corresponda a $>$ o $<$.

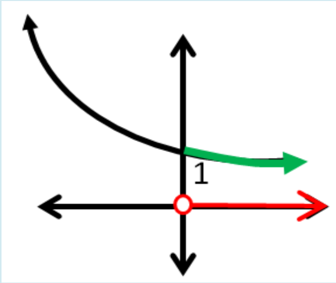
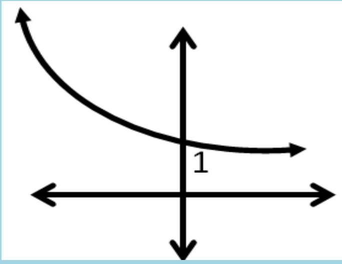
A	$>$	( )	$f\left(\frac{1}{4}\right)$ _____ $g\left(\frac{1}{4}\right)$
		( )	$h\left(\frac{1}{2}\right)$ _____ $s\left(\frac{1}{2}\right)$
		( )	$g\left(\frac{1}{3}\right)$ _____ $h\left(\frac{1}{3}\right)$
B	$<$	( )	$f\left(\frac{1}{2}\right)$ _____ $s(2)$
		( )	$h(2)$ _____ $s(2)$
		( )	$g(2)$ _____ $f(2)$

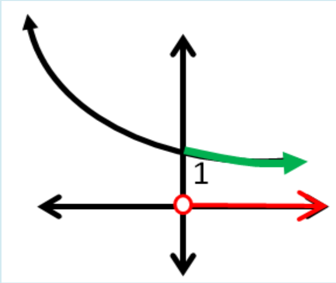
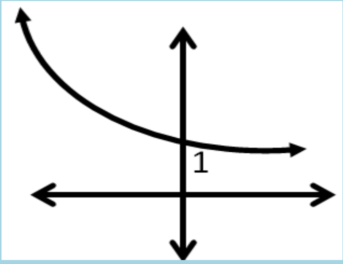
Soluciones

1.

A	Como $b \in \mathbb{R}^-$ entonces $f(x) = \log_b x$ no es una función logarítmica porque es necesario que la base sea positiva y diferente de 1.
B	Como $b \in \mathbb{R}^-$ entonces $f(x) = \log_{\frac{1}{b}} x$ no es una función logarítmica porque es necesario que la base sea positiva y diferente de 1.
C	Como $b \in \mathbb{R}^- \Rightarrow -b \in \mathbb{R}^+$. Como $b \neq -1 \Rightarrow -b \neq 1$. Esto significa que $f(x) = \log_{-b} x$ sí es una función logarítmica.
D	Como $b \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \frac{-1}{b} \in \mathbb{R}^+$. Como $b \neq -1 \Rightarrow \frac{-1}{b} \neq 1$. Esto significa que $f(x) = \log_{\frac{-1}{b}} x$ sí es una función logarítmica.

2.

A	Es incorrecta, las imágenes no son mayores que 1 cuando $x > 0$.	
B	Es correcta, por ser una función decreciente se debe cumplir que $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right)$	

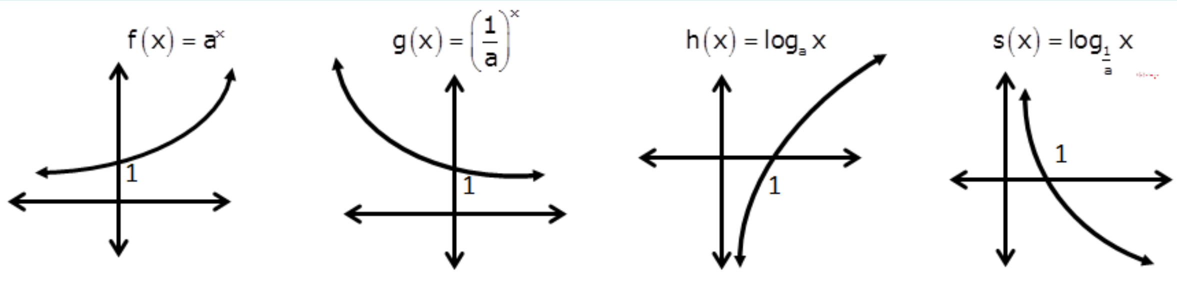
C	Es correcta, las imágenes son menores que 1 cuando $x > 0$.	
D	Es correcta, por ser una función decreciente se debe cumplir que $-2 < -1 \Rightarrow f(-2) > f(-1)$	

3.

A	Cóncava hacia arriba	(A)	$f(x) = \log_{\frac{3}{4}} x$ $\frac{3}{4} < 1$
		(B)	$g(x) = \log_{8} x$ $8 > 1$
		(A)	$h(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$ $\frac{1}{7} < 1$
B	Cóncava hacia abajo	(A)	$k(x) = \log_{\frac{4}{5}} x$ $\frac{4}{5} < 1$
		(B)	$s(x) = \log_{\frac{7}{3}} x$ $\frac{7}{3} > 1$

		(B)	$t(x)=\log_{1,6} x$ $1,6>1$

4.

<table>
<tr><td colspan="4">Se pueden establecer las comparaciones entre las imágenes usando las gráficas de las cuatro funciones dadas.
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">A</td><td rowspan="3">></td><td>(A)</td><td>$f\left(\frac{1}{4}\right)>1$ y $g\left(\frac{1}{4}\right)<1$
$\Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right)>g\left(\frac{1}{4}\right)$</td></tr>
<tr><td>(B)</td><td>$h\left(\frac{1}{2}\right)<0$ y $s\left(\frac{1}{2}\right)>0$
$\Rightarrow h\left(\frac{1}{2}\right)<s\left(\frac{1}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>(A)</td><td>$0<g\left(\frac{1}{3}\right)<1$ y $h\left(\frac{1}{3}\right)<0$
$\Rightarrow g\left(\frac{1}{3}\right)>h\left(\frac{1}{3}\right)$</td></tr>
<tr><td>B</td><td><</td><td>(A)</td><td>$f\left(\frac{1}{2}\right)>1$ y $s(2)<0$
$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)>s(2)$</td></tr>
</table>

		(A)	$h(2) > 0$ y $s(2) < 0$ $\Rightarrow h(2) > s(2)$
		(B)	$0 < g(2) < 1$ y $f(2) > 1$ $\Rightarrow g(2) < f(2)$