FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ejemplos

1. Determine en cuál intervalo son estrictamente crecientes las siguientes funciones cuadráticas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b. $g(x) = 3 - 2x + x^2$

c. $h(x) = -x^2 + 2x - 4$

d. $f(x) = x^2 + 2x$

Solución

A	$f(x) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow a = 1, b = -2, c = 1$ Como $a > 0$ la función es cóncava hacia arriba y estrictamente creciente en el intervalo $\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$.	$\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[= \left]\frac{-(-2)}{2 \cdot 1}, +\infty\right[= \left]1, +\infty\right[$ $\Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en $\left]1, +\infty\right[$
B	$g(x) = 3 - 2x + x^2 \Rightarrow a = 1, b = -2, c = 3$ Como $a > 0$ la función es cóncava hacia arriba y estrictamente creciente en el intervalo $\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$.	$\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[= \left]\frac{-(-2)}{2 \cdot 1}, +\infty\right[= \left]1, +\infty\right[$ $\Rightarrow g(x)$ es estrictamente creciente en $\left]1, +\infty\right[$
C	$h(x) = -x^2 + 2x - 4 \Rightarrow a = -1, b = 2, c = -4$ Como $a < 0$ la función es cóncava hacia arriba y estrictamente creciente en el intervalo $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right[$.	$\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right[= \left]-\infty, \frac{-2}{2 \cdot -1}\right[= \left]-\infty, 1\right[$ $\Rightarrow h(x)$ es estrictamente creciente en $\left]-\infty, 1\right[$
D	$f(x) = x^2 + 2x \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 0$ Como $a > 0$ la función es cóncava hacia arriba y estrictamente creciente en el intervalo $\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$.	$\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[= \left]\frac{-2}{2 \cdot 1}, +\infty\right[= \left]-1, +\infty\right[$ $\Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en $\left]-1, +\infty\right[$

2. En la columna de la derecha aparecen diferentes funciones cuadráticas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Escriba la letra correspondiente dentro del paréntesis que antecede a cada una de ellas, según el número de puntos en los cuales la función corta el eje X.

A	0	( )	$g(x) = 2x^2 - 5x + 3$
		( )	$h(x) = 9x^2 + 12x + 4$
B	1	( )	$f(x) = 5x^2 + x + 3$
		( )	$g(x) = \frac{x^2}{4} + x + 1$
C	2	( )	$f(x) = -x^2 - x + 2$
		( )	$f(x) = \frac{-x^2}{3} - \frac{x}{3} + 2$

Solución

A	0	(C)	$g(x) = 2x^2 - 5x + 3 \Rightarrow a = 2, b = -5, c = 3$ $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 > 0$
		(B)	$h(x) = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow a = 9, b = 12, c = 4$ $\Rightarrow \Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$
B	1	(A)	$f(x) = 5x^2 + x + 3 \Rightarrow a = 5, b = 1, c = 3$ $\Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = -59 < 0$
		(B)	$g(x) = \frac{x^2}{4} + x + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 1, c = 1$ $\Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 0$
C	2	(C)	$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow a = -1, b = -1, c = 2$ $\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot -1 \cdot 2 = 9 > 0$

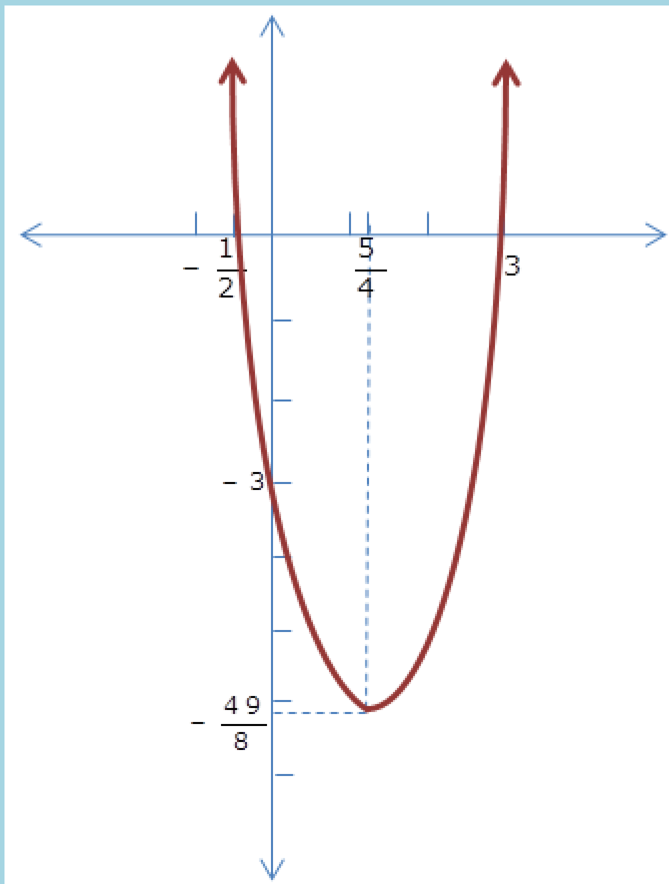
		(C)	$f(x)=\frac{-x^2}{3}-\frac{x}{3}+2 \Rightarrow a=\frac{-1}{3}, b=\frac{-1}{3}, c=2$ $\Rightarrow \Delta=\left(\frac{-1}{3}\right)^2-4\cdot\frac{-1}{3}\cdot 2=\frac{25}{9}>0$

3. Para la función cuadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $f(x)=2x^2-5x-3$, determine:

a) Concavidad.
b) Vértice.
c) Eje de simetría.
d) Intersecciones con el eje X.
e) Intersección con el eje Y.
f) Ámbito.
g) Intervalos de monotonía.
h) Gráfica.

Solución

A	$f(x)=2x^2-5x-3 \Rightarrow a=2, b=-5, c=-3$	Como $a=2 \Rightarrow a>0$ la función es cóncava hacia arriba.
B	El punto vértice se encuentra calculando $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$.	$\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot -3=49$ $\Rightarrow\left(\frac{-(-5)}{2\cdot 2},\frac{-49}{4\cdot 2}\right)=\left(\frac{5}{4},\frac{-49}{8}\right)$
C	El eje de simetría corresponde a $x=\frac{-b}{2a}$.	$x=\frac{5}{4}$
D	Para encontrar la intersección con el eje X como $\Delta>0$ se tienen dos puntos: $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$ con $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$.	$x_1=\frac{5+\sqrt{49}}{4}=3$ $x_2=\frac{5-\sqrt{49}}{4}=\frac{-1}{2}$ $\Rightarrow(3,0)\wedge\left(\frac{-1}{2},0\right)$
E	La intersección con el eje Y se encuentra en $(0,c)$.	$(0,-3)$

F	Como la función es cóncava hacia arriba el ámbito viene dado por $\left[\frac{-\Delta}{4a},+\infty\right[$.	Ámbito: $\left[\frac{-49}{8},+\infty\right[$
G	Como la función es cóncava hacia arriba será estrictamente decreciente en el intervalo $\left]-\infty,\frac{-b}{2a}\right[$ y será estrictamente creciente en el intervalo $\left]\frac{-b}{2a},+\infty\right[$.	Estrictamente decreciente: $\left]-\infty,\frac{5}{4}\right[$ Estrictamente creciente: $\left]\frac{5}{4},+\infty\right[$
H		

4. En el instante $t = 0$, con t en segundos, un clavadista se lanza desde un trampolín, el cual se encuentra ubicado a 6 metros sobre el nivel del agua de la piscina. La función $f(t) = -2t^2 + 4t + 6$ proporciona la posición en metros del clavadista.

Determine:

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el clavadista?
b) ¿En qué instante alcanza la altura máxima?
c) ¿Cuánto tarda en llegar al agua?

Solución

<table>
<tr><td colspan="3">En la función de posición $f(t) = -2t^2 + 4t + 6$ se tiene que $a = -2, b = 4, c = 6$.

Como $a < 0$ es cóncava hacia abajo.

Su punto vértice que se encuentra calculando $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.</td></tr>
<tr><td>A</td><td>La segunda coordenada del punto vértice proporciona la altura máxima que alcanza el clavadista.</td><td>$\Delta = 4^2 - 4 \cdot -2 \cdot 6 = 64$
$\Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-64}{4 \cdot -2} = 8$
La altura máxima que alcanza es de $8\ m$.</td></tr>
<tr><td>B</td><td>La primera coordenada del punto vértice proporciona el instante en el cual alcanza la altura máxima.</td><td>$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot -2} = 1$
Alcanza la altura máxima en 1 segundo.</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Para encontrar el instante en el que llega al agua debe buscarse $f(t) = 0$ y como $\Delta > 0$ se tienen dos puntos:
$(t_1, 0)$ y $(t_2, 0)$
con $t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$, $t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$.</td><td>$t_1 = \frac{-4 + \sqrt{64}}{-4} = -1$
$t_2 = \frac{-4 - \sqrt{64}}{-4} = 3$
Como la variable t corresponde a tiempo no puede ser negativa, de manera que el clavadista llega al agua en 3 segundos.</td></tr>
</table>

Ejercicios

1. Asocie cada una de las funciones cuadráticas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de la columna de la izquierda con su respectivo punto vértice en la columna de la derecha, escribiendo la letra correspondiente dentro del paréntesis.

A	$f(x) = 2x - 1 - 3x^2$	( )	$\left(\frac{-1}{3}, \frac{5}{3}\right)$
B	$g(x) = 3x + 2x^2 + 1$	( )	$\left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$
C	$h(x) = -x^2 + 3 + 2x$	( )	$(1, 4)$
D	$k(x) = 3x^2 + 2x + 2$	( )	$\left(\frac{-3}{4}, \frac{-1}{8}\right)$

2. Para la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x^2 - 2x - 8$, determine:
   a) Concavidad.
   b) Vértice.
   c) Eje de simetría.
   d) Intersecciones con el eje X.
   e) Intersección con el eje Y.
   f) Ámbito.
   g) Intervalos de monotonía.
   h) Gráfica.

3. Se lanza una moneda al aire desde una altura de $64\,m$. La posición de la moneda, después de que han transcurrido t segundos, viene dada por la función $h(t) = -16t^2 + 48t + 64$.

   Determine:
   a) La altura máxima que alcanza la moneda.
   b) El instante en el cual alcanza la altura máxima.
   c) El tiempo que tarda la moneda en caer al suelo.

4. Para las siguientes funciones cuadráticas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, determine los puntos en los cuales su gráfica interseca el eje X.

   a. $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$
   b. $k(x) = 9x^2 + 25 + 30x$
   c. $g(x) = 7x - 2 + 4x^2$
   d. $h(x) = -x^2 - 3 + 2x$
   e. $f(x) = 4x^2 + 1 - 4x$
   f. $g(x) = 5x^2 + x + 3$

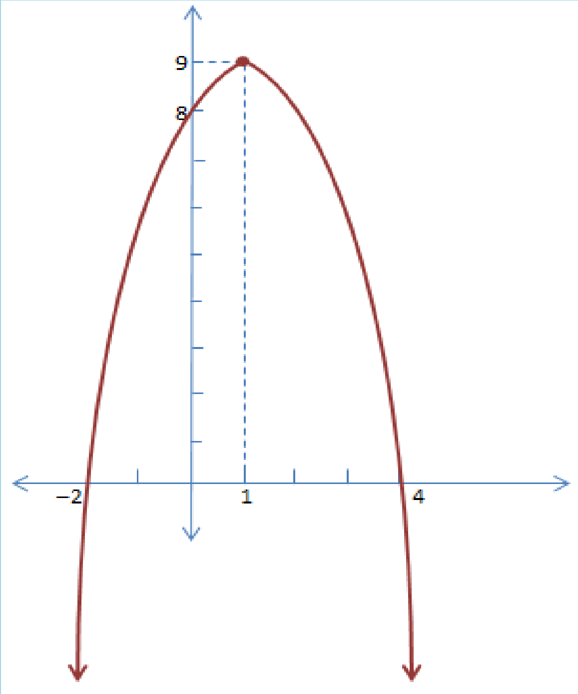
Soluciones

1.

A	$f(x) = 2x - 1 - 3x^2 \Rightarrow a = -3, b = 2, c = -1$ $\Delta = 2^2 - 4 \cdot -3 \cdot -1 = -8$ $\left(\frac{-2}{2 \cdot -3}, \frac{--8}{4 \cdot -3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$	(D)	$\left(\frac{-1}{3}, \frac{5}{3}\right)$
B	$g(x) = 3x + 2x^2 + 1 \Rightarrow a = 2, b = 3, c = 1$ $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$ $\left(\frac{-3}{2 \cdot 2}, \frac{-1}{4 \cdot 2}\right) = \left(\frac{-3}{4}, \frac{-1}{8}\right)$	(A)	$\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$
C	$h(x) = -x^2 + 3 + 2x \Rightarrow a = -1, b = 2, c = 3$ $\Delta = 2^2 - 4 \cdot -1 \cdot 3 = 16$ $\left(\frac{-2}{2 \cdot -1}, \frac{-16}{4 \cdot -1}\right) = (1, 4)$	(C)	$(1, 4)$
D	$k(x) = 3x^2 + 2x + 2 \Rightarrow a = 3, b = 2, c = 2$ $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -20$ $\left(\frac{-2}{2 \cdot 3}, \frac{--20}{4 \cdot 3}\right) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{5}{3}\right)$	(B)	$\left(\frac{-3}{4}, \frac{-1}{8}\right)$

2.

A	$g(x) = -x^2 + 2x + 8 \Rightarrow a = -1, b = 2, c = 8$	Como $a = -1 \Rightarrow a < 0$ la función es cóncava hacia abajo.
B	El punto vértice se encuentra calculando $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.	$\Delta = 2^2 - 4 \cdot -1 \cdot 8 = 36$ $\Rightarrow \left(\frac{-2}{2 \cdot -1}, \frac{-36}{4 \cdot -1}\right) = (1, 9)$
C	El eje de simetría corresponde a $x = \frac{-b}{2a}$.	$x = 1$
D	Para encontrar la intersección con el eje X como $\Delta > 0$ se tienen dos puntos: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ con $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$.	$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{-2} = -2$ $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{-2} = 4$ $\Rightarrow (-2, 0) \wedge (4, 0)$
E	La intersección con el eje Y se encuentra en $(0, c)$.	$(0, 8)$
F	Como la función es cóncava hacia abajo el ámbito viene dado por $\left]-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$.	Ámbito: $]-\infty, 9]$
G	Como la función es cóncava hacia abajo será estrictamente decreciente en el intervalo $\left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$ y será estrictamente creciente en el intervalo $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right[$.	Estrictamente decreciente: $]1, +\infty[$ Estrictamente creciente: $]-\infty, 1[$

H	

3.

En la función de posición $h(t) = -16t^2 + 48t + 64$ se tiene que $a = -16, b = 48, c = 64$.

Como $a < 0$ es cóncava hacia abajo.

Su punto vértice que se encuentra calculando $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

A	La segunda coordenada del punto vértice proporciona la altura máxima que alcanza la moneda.	$\Delta = 48^2 - 4 \cdot -16 \cdot 64 = 6400$ $\Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-6400}{4 \cdot -16} = 100$ La altura máxima que alcanza es de 100 m.
B	La primera coordenada del punto vértice proporciona el instante en el cual alcanza la altura máxima.	$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-48}{2 \cdot -16} = \frac{3}{2} = 1,5$ Alcanza la altura máxima en $1,5$ segundos.

C	Para encontrar el instante en el que cae al suelo debe buscarse $h(t)=0$ y como $\Delta>0$ se tienen dos puntos: $(t_1,0)$ y $(t_2,0)$ con $t_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$, $t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$.	$t_1=\frac{-48+\sqrt{6400}}{-32}=-1$ $t_2=\frac{-48-\sqrt{6400}}{-32}=4$ Como la variable t corresponde a tiempo no puede ser negativa, de manera que la moneda cae al suelo en 4 segundos.

4.

A	$f(x)=-3x^2+5x-2\Rightarrow a=-3,b=5,c=-2$ $\Delta=5^2-4\cdot-3\cdot-2=1>0$	$x_1=\frac{-5+\sqrt{1}}{-6}=\frac{2}{3}$ $x_2=\frac{-5-\sqrt{1}}{-6}=1$ $\Rightarrow\left(\frac{2}{3},0\right)\wedge(1,0)$
B	$k(x)=9x^2+25+30x\Rightarrow a=9,b=30,c=25$ $\Delta=30^2-4\cdot9\cdot25=0$	$x_1=\frac{-30+\sqrt{0}}{18}=\frac{-5}{3}$ $\Rightarrow\left(\frac{-5}{3},0\right)$
C	$g(x)=7x-2+4x^2\Rightarrow a=4,b=7,c=-2$ $\Delta=7^2-4\cdot4\cdot-2=81>0$	$x_1=\frac{-7+\sqrt{81}}{8}=\frac{1}{4}$ $x_2=\frac{-7-\sqrt{81}}{8}=-2$ $\Rightarrow\left(\frac{1}{4},0\right)\wedge(-2,0)$
D	$h(x)=-x^2-3+2x\Rightarrow a=-1,b=2,c=-3$ $\Delta=2^2-4\cdot-1\cdot-3=-8<0$	Su gráfica no corta el eje X.
E	$f(x)=4x^2+1-4x\Rightarrow a=4,b=-4,c=1$ $\Delta=(-4)^2-4\cdot4\cdot1=0$	$x_1=\frac{4+\sqrt{0}}{8}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\left(\frac{1}{2},0\right)$

F	$g(x) = 5x^2 + x + 3 \Rightarrow a = 5, b = 1, c = 3$ $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = -59 < 0$	Su gráfica no corta el eje X.