OPERACIONES CON FUNCIONES

Ejemplos

1. Si $f(x) = 1 - 3x$ y $g(x) = 4 - \frac{2}{5}x$ calcule la función que resulta de cada una de las siguientes operaciones y encuentre su dominio máximo.

a. $(f + g)(x)$

b. $(f - g)(x)$

c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

d. $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

e. $(f \cdot g)(x)$

Solución

A	$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (1-3x) + \left(4 - \frac{2}{5}x\right)\\ &= 1 - 3x + 4 - \frac{2}{5}x\\ &= 5 - \frac{17}{5}x\end{aligned}$	$D_{f+g} = \mathbb{R}$
B	$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (1-3x) - \left(4 - \frac{2}{5}x\right)\\ &= 1 - 3x - 4 + \frac{2}{5}x\\ &= -3 - \frac{13}{5}x\end{aligned}$	$D_{f-g} = \mathbb{R}$

C	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $=\frac{1-3x}{4-\frac{2}{5}x}$ $=\frac{\frac{1-3x}{1}}{\frac{20-2x}{5}}$ $=\frac{5-15x}{20-2x}$	$20-2x=0$ $\Rightarrow 20=2x$ $\Rightarrow \frac{20}{2}=x$ $\Rightarrow 10=x$ $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{10\}$
D	$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ $=\frac{4-\frac{2}{5}x}{1-3x}$ $=\frac{\frac{20-2x}{5}}{\frac{1-3x}{1}}$ $=\frac{20-2x}{5-15x}$	$5-15x=0$ $\Rightarrow 5=15x$ $\Rightarrow \frac{5}{15}=x$ $\Rightarrow \frac{1}{3}=x$ $D_{\frac{g}{f}}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$
E	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ $=(1-3x)\cdot\left(4-\frac{2}{5}x\right)$ $=4-\frac{2}{5}x-12x+\frac{6}{5}x^2$ $=6x^2-\frac{62}{5}x+4$	$D_{f\cdot g}=\mathbb{R}$

2. Para $g(x)=\sqrt[4]{x}$ y $h(x)=9x^2$ calcule la función que resulta de la composición $(goh)(x)$ y encuentre su dominio máximo.

Solución

$$\begin{aligned}(goh)(x) &= g\left[h(x)\right]\\ &= g\left(9x^2\right)\\ &= \sqrt[4]{9x^2}\\ &= \sqrt[4]{3^2x^2}\\ &= \sqrt{3x}\end{aligned}$$	$D_g = \left[0,+\infty\right[$ $D_h = \mathbb{R}$ $\Rightarrow D_{goh} = \left[0,+\infty\right[$

3. Calcule el dominio máximo para cada función con $f(x) = 2x^2 - 7x - 4$ y $g(x) = 2x^2 + 7x + 3$.

a. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

b. $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

Solución

A	$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{2x^2-7x-4}{2x^2+7x+3}\\ &= \frac{(x-4)(2x+1)}{(x+3)(2x+1)}\\ &= \frac{x-4}{x+3}\end{aligned}$$	$(x+3)(2x+1)=0$ $\Rightarrow x=-3 \text{ o } x=\dfrac{-1}{2}$ $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \left\{-3,\dfrac{-1}{2}\right\}$
B	$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{2x^2+7x+3}{2x^2-7x-4}\\ &= \frac{(x+3)(2x+1)}{(x-4)(2x+1)}\\ &= \frac{x+3}{x-4}\end{aligned}$$	$(x-4)(2x+1)=0$ $\Rightarrow x=4 \text{ o } x=\dfrac{-1}{2}$ $D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-1}{2},4\right\}$

Ejercicios

1. Para las funciones $h(x) = 3x$, $g(x) = \dfrac{3}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$ asocie cada composición de funciones que aparece en la columna de la izquierda con su respectivo resultado en la columna de la derecha, escribiendo la letra correspondiente en el espacio que se proporciona.

A	$(hog)(x)$	( )	$\dfrac{3}{\sqrt{x}}$
B	$(gof)(x)$	( )	$\sqrt{\dfrac{3}{x}}$
C	$(foh)(x)$	( )	$3\sqrt{x}$
D	$(fog)(x)$	( )	$\dfrac{1}{x}$
E	$(hof)(x)$	( )	$\dfrac{9}{x}$
F	$(goh)(x)$	( )	$\sqrt{3x}$

2. Si $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2 - x^2$ calcule la función que resulta de cada una de las siguientes operaciones y encuentre su dominio máximo.

a. $(f + g)(x)$
b. $(f - g)(x)$
c. $(g - f)(x)$
d. $(f \cdot g)(x)$
e. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

3. Para $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$ calcule la función que resulta de la composición $(f o g)(x)$ y encuentre su dominio máximo.

Soluciones

1.

A	$(hog)(x) = h[g(x)] = h\left(\frac{3}{x}\right) = 3 \cdot \frac{3}{x} = \frac{9}{x}$	(B)	$\frac{3}{\sqrt{x}}$
B	$(gof)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = \frac{3}{\sqrt{x}}$	(D)	$\sqrt{\frac{3}{x}}$
C	$(foh)(x) = f[h(x)] = f(3x) = \sqrt{3x}$	(E)	$3\sqrt{x}$
D	$(fog)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{3}{x}\right) = \sqrt{\frac{3}{x}}$	(F)	$\frac{1}{x}$
E	$(hof)(x) = h[f(x)] = h(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x}$	(A)	$\frac{9}{x}$
F	$(goh)(x) = g[h(x)] = g(3x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$	(C)	$\sqrt{3x}$

2.

A	$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (x^2-2) + (2-x^2) \\ &= x^2 - 2 + 2 - x^2 \\ &= 0\end{aligned}$	$D_{f+g} = \mathbb{R}$
B	$\begin{aligned}(f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (x^2-2) - (2-x^2) \\ &= x^2 - 2 - 2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 4\end{aligned}$	$D_{f-g} = \mathbb{R}$

C	$\begin{aligned}(g-f)(x) &= g(x)-f(x)\\ &= (2-x^2)-(x^2-2)\\ &= 2-x^2-x^2+2\\ &= 4-2x^2\end{aligned}$	$D_{g-f}=\mathbb{R}$
D	$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ &= (x^2-2)\cdot(2-x^2)\\ &= 2x^2-x^4-4+2x^2\\ &= 4x^2-x^4-4\end{aligned}$	$D_{f\cdot g}=\mathbb{R}$
E	$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}\\ &= \frac{x^2-2}{2-x^2}\\ &= \frac{-(2-x^2)}{2-x^2}\\ &= -1\end{aligned}$	$\begin{aligned}&2-x^2=0\\ \Rightarrow\ &2=x^2\\ \Rightarrow\ &\pm\sqrt{2}=x\end{aligned}$ $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{2}\}$

3.

$\begin{aligned}(fog)(x) &= f[g(x)]\\ &= f(\sqrt{x})\\ &= \frac{(\sqrt{x})^2+1}{\sqrt{x}}\\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$	$\begin{aligned}&D_f=\mathbb{R}-\{0\}\\ &D_g=[0,+\infty[\\ \Rightarrow\ &D_{fog}=]0,+\infty[\end{aligned}$