ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ejemplos

1. Asocie cada ecuación logarítmica de la columna de la izquierda con el respectivo valor de su solución en la columna de la derecha, escribiendo dentro del paréntesis la letra correspondiente.

A	$\log_x 2 = 4$	( )	$\sqrt[4]{2}$
B	$\log_x \sqrt[4]{2} = 2$	( )	$\frac{1}{2}$
C	$\log_2 x = \frac{1}{2}$	( )	4
D	$\log_x 2 = \frac{1}{2}$	( )	$\sqrt[8]{2}$
E	$\log_{\frac{1}{2}} x = 1$	( )	$\sqrt{2}$

Solución

A	$\log_x 2 = 4$ $x^4 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[4]{2}$	(A)	$\sqrt[4]{2}$
B	$\log_x \sqrt[4]{2} = 2$ $x^2 = \sqrt[4]{2} \Rightarrow x = \sqrt{\sqrt[4]{2}} \Rightarrow x = \sqrt[8]{2}$	(E)	$\frac{1}{2}$
C	$\log_2 x = \frac{1}{2}$ $2^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow \sqrt{2} = x$	(D)	4
D	$\log_x 2 = \frac{1}{2}$ $x^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow x = 2^2 \Rightarrow x = 4$	(B)	$\sqrt[8]{2}$

E	$\log_{\frac{1}{2}} x = 1$ $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = x \Rightarrow \frac{1}{2} = x$	(C)	$\sqrt{2}$

2. Encuentre el conjunto solución de la ecuación $\log_4(3x+2) - \log_4(x+4) = 0$.

Solución

A	Se aplican propiedades de logaritmos.	$\log_4(3x+2) - \log_4(x+4) = 0$ $\Rightarrow \log_4\left(\frac{3x+2}{x+4}\right) = 0$
B	Se aplica función exponencial de base 4 a amos lados y se usa el hecho de que logarítmica y exponencial son funciones inversas.	$4^{\log_4\left(\frac{3x+2}{x+4}\right)} = 4^0$ $\Rightarrow \frac{3x+2}{x+4} = 1$
C	Se resuelve la ecuación resultante.	$\frac{3x+2}{x+4} = 1$ $\Rightarrow 3x+2 = x+4$ $\Rightarrow 3x - x = 4 - 2$ $\Rightarrow 2x = 2$ $\Rightarrow x = \frac{2}{2}$ $\Rightarrow x = 1$
D	Se prueba la posible solución.	$\log_4(3\cdot 1+2) - \log_4(1+4) = 0$ $\Rightarrow \log_4(5) - \log_4(5) = 0$ $\Rightarrow 0 = 0$
E	Se da el conjunto solución.	$S = \{1\}$

3. Calcule el valor de x que resuelve la ecuación $5^{2x+1} = 2^{x-3}$.

Solución

A	Se aplica la función logarítmica de base 10 a ambos lados.	$5^{2x+1}=2^{x-3}$ $\Rightarrow \log 5^{2x+1}=\log 2^{x-3}$
B	Se aplican las propiedades de logaritmos.	$\log 5^{2x+1}=\log 2^{x-3}$ $\Rightarrow (2x+1)\log 5=(x-3)\log 2$
C	Se efectúan los productos.	$(2x+1)\log 5=(x-3)\log 2$ $\Rightarrow 2x\log 5+\log 5=x\log 2-3\log 2$
D	Se despeja x.	$2x\log 5+\log 5=x\log 2-3\log 2$ $\Rightarrow 2x\log 5-x\log 2=-3\log 2-\log 5$ $\Rightarrow x(2\log 5-\log 2)=-3\log 2-\log 5$ $\Rightarrow x=\dfrac{-3\log 2-\log 5}{2\log 5-\log 2}$

4. Resuelva la ecuación $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^{x+2}}=1$.

Solución

A	Se aplican propiedades de las potencias hasta tener la misma base a ambos lados de la ecuación.	$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^{x+2}}=1$ $\Rightarrow \frac{1}{3^{3x}}\cdot\frac{1}{3^{x+2}}=1$ $\Rightarrow 3^{-3x}\cdot 3^{-(x+2)}=3^0$ $\Rightarrow 3^{-3x-(x+2)}=3^0$ $\Rightarrow 3^{-3x-x-2}=3^0$ $\Rightarrow 3^{-4x-2}=3^0$

B	Se resuelve la ecuación resultante de igualar los exponentes.	$3^{-4x-2} = 3^0$ $\Rightarrow -4x - 2 = 0$ $\Rightarrow -4x = 2$ $\Rightarrow x = \frac{2}{-4}$ $\Rightarrow x = \frac{-1}{2}$

5. Encuentre el conjunto solución de la ecuación $-2 = 3\log_2 5 + \log_2 x$.

Solución

A	Se aplican propiedades de logaritmos.	$-2 = 3\log_2 5 + \log_2 x$ $\Rightarrow -2 = \log_2 5^3 + \log_2 x$ $\Rightarrow -2 = \log_2 \left(5^3 \cdot x\right)$ $\Rightarrow -2 = \log_2 \left(125x\right)$
B	Se aplica función exponencial de base 2 a ambos lados y se usa el hecho de que logarítmica y exponencial son funciones inversas.	$-2 = \log_2 \left(125x\right)$ $\Rightarrow 2^{-2} = 2^{\log_2 (125x)}$ $\Rightarrow 2^{-2} = 125x$
C	Se resuelve la ecuación resultante.	$2^{-2} = 125x$ $\Rightarrow \frac{1}{2^2} = 125x$ $\Rightarrow \frac{1}{4} = 125x$ $\Rightarrow \frac{1}{500} = x$
E	Se da el conjunto solución.	$S = \left\{\frac{1}{500}\right\}$

Ejercicios

1. Encuentre el conjunto solución de la ecuación $3^{2-3x} \cdot 2^{-3x+2} = 6^{4x-1}$.

2. Calcule el valor de $\log_k a$ usando el hecho de que $\log_k \left(\dfrac{1}{b\sqrt[4]{b^3}} \right) = \dfrac{1}{2}$.

3. Encuentre el conjunto solución de la ecuación $\log_{(x-1)} (2x + 11) = 2$.

4. Calcule el valor de x que satisface la ecuación $\dfrac{243^{2x+3}}{3^{5(1-x)}} = 2187$.

5. Asocie cada ecuación exponencial de la columna de la izquierda con el respectivo valor de su solución en la columna de la derecha, escribiendo dentro del paréntesis la letra correspondiente.

A	$2^{x-1} = 6$	( )	$\log_2 6 - 1$
B	$3^{x+1} = 6$	( )	$\log_6 3 + 1$
C	$2^{x+1} = 6$	( )	$\log_2 6 + 1$
D	$6^{x-1} = 3$	( )	$\log_3 6 - 1$
E	$6^{x+1} = 2$	( )	$\log_6 2 - 1$

Soluciones

1.

A	Se aplican las leyes de potencias hasta tener la misma base a ambos lados de la ecuación.	$3^{2-3x}\cdot 2^{-3x+2}=6^{4x-1}$ $\Rightarrow 3^{2-3x}\cdot 2^{2-3x}=6^{4x-1}$ $\Rightarrow (3\cdot 2)^{2-3x}=6^{4x-1}$ $\Rightarrow 6^{2-3x}=6^{4x-1}$
B	Como se tiene la misma base se igualan los exponentes y se resuelve la ecuación resultante.	$6^{2-3x}=6^{4x-1}$ $\Rightarrow 2-3x=4x-1$ $\Rightarrow -3x-4x=-1-2$ $\Rightarrow -7x=-3$ $\Rightarrow x=\frac{-3}{-7}$ $\Rightarrow x=\frac{3}{7}$
C	Se da el conjunto solución.	$S=\left\{\frac{3}{7}\right\}$

2.

A	Se aplican las leyes de potencias.	$\log_k\left(\frac{1}{b\sqrt[4]{b^3}}\right)=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \log_k\left(\frac{1}{b\cdot b^{\frac{3}{4}}}\right)=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \log_k\left(\frac{1}{b^{1+\frac{3}{4}}}\right)=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \log_k\left(\frac{1}{b^{\frac{7}{4}}}\right)=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \log_k\left(b^{\frac{-7}{4}}\right)=\frac{1}{2}$
B	Se aplica una de las propiedades de logaritmos que permite pasar a multiplicar el exponente.	$\log_k\left(b^{\frac{-7}{4}}\right)=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{-7}{4}\log_k b=\frac{1}{2}$

C	Se despeja el logaritmo cuyo valor se está buscando.	$\frac{-7}{4}\log_k b = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \log_k b = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{7}$ $\Rightarrow \log_k b = \frac{-2}{7}$

3.

A	Se aplica la definición de logaritmo.	$\log_{(x-1)}(2x+11) = 2$ $\Rightarrow (x-1)^2 = (2x+11)$
B	Se resuelve la ecuación cuadrática resultante.	$(x-1)^2 = (2x+13)$ $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 13$ $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 2x - 13 = 0$ $\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$ $\Rightarrow (x+2)(x-6) = 0$ $\Rightarrow x = -2 \quad \text{o} \quad x = 6$
C	Se prueban las posibles soluciones.	$\text{Si } x = -2 \Rightarrow x - 1 = -3$ Como un logaritmo no puede tener base negativa esta solución se descarta.
E	Se da el conjunto solución.	$S = \{6\}$

4.

A	Se factorizan completamente las bases.	$\frac{243^{2x+3}}{3^{5(1-x)}} = 2187$ $\Rightarrow \frac{\left(3^5\right)^{2x+3}}{3^{5(1-x)}} = 3^7$

B	Se aplican las leyes de potencias hasta tener la misma base a ambos lados de la ecuación.	$\frac{\left(3^5\right)^{2x+3}}{3^{5(1-x)}} = 3^7$ $\Rightarrow \frac{3^{5(2x+3)}}{3^{5(1-x)}} = 3^7$ $\Rightarrow 3^{5(2x+3)} \cdot 3^{-5(1-x)} = 3^7$ $\Rightarrow 3^{5(2x+3)-5(1-x)} = 3^7$ $\Rightarrow 3^{10x+15-5+5x} = 3^7$ $\Rightarrow 3^{15x+10} = 3^7$
C	Como se tiene la misma base a ambos lados de la ecuación se pueden igualar los exponentes y resolver la ecuación resultante.	$3^{15x+10} = 3^7$ $\Rightarrow 15x + 10 = 7$ $\Rightarrow 15x = 7 - 10$ $\Rightarrow 15x = -3$ $\Rightarrow x = \frac{-3}{15}$ $\Rightarrow x = \frac{-1}{5}$

5.

A	$2^{x-1} = 6$ $\Rightarrow \log 2^{x-1} = \log 6$ $\Rightarrow (x-1)\log 2 = \log 6$ $\Rightarrow x\log 2 - \log 2 = \log 6$ $\Rightarrow x\log 2 = \log 6 + \log 2$ $\Rightarrow x = \frac{\log 6 + \log 2}{\log 2}$ $\Rightarrow x = \frac{\log 6}{\log 2} + \frac{\log 2}{\log 2}$ $\Rightarrow x = \log_2 6 + 1$	(C)	$\log_2 6 - 1$

B	$3^{x+1}=6$ $\Rightarrow \log 3^{x+1}=\log 6$ $\Rightarrow (x+1)\log 3=\log 6$ $\Rightarrow x\log 3+\log 3=\log 6$ $\Rightarrow x\log 3=\log 6-\log 3$ $\Rightarrow x=\dfrac{\log 6-\log 3}{\log 3}$ $\Rightarrow x=\dfrac{\log 6}{\log 3}-\dfrac{\log 3}{\log 3}$ $\Rightarrow x=\log_3 6-1$	(D)	$\log_6 3+1$
C	$2^{x+1}=6$ $\Rightarrow \log 2^{x+1}=\log 6$ $\Rightarrow (x+1)\log 2=\log 6$ $\Rightarrow x\log 2+\log 2=\log 6$ $\Rightarrow x\log 2=\log 6-\log 2$ $\Rightarrow x=\dfrac{\log 6-\log 2}{\log 2}$ $\Rightarrow x=\dfrac{\log 6}{\log 2}-\dfrac{\log 2}{\log 2}$ $\Rightarrow x=\log_2 6-1$	(A)	$\log_2 6+1$
D	$6^{x-1}=3$ $\Rightarrow \log 6^{x-1}=\log 3$ $\Rightarrow (x-1)\log 6=\log 3$ $\Rightarrow x\log 6-\log 6=\log 3$ $\Rightarrow x\log 6=\log 3+\log 6$ $\Rightarrow x=\dfrac{\log 3+\log 6}{\log 6}$ $\Rightarrow x=\dfrac{\log 3}{\log 6}+\dfrac{\log 6}{\log 6}$ $\Rightarrow x=\log_6 3+1$	(B)	$\log_3 6-1$

E	$6^{x+1}=2$ $\Rightarrow \log 6^{x+1}=\log 2$ $\Rightarrow (x+1)\log 6=\log 2$ $\Rightarrow x\log 6+\log 6=\log 2$ $\Rightarrow x\log 6=\log 2-\log 6$ $\Rightarrow x=\dfrac{\log 2-\log 6}{\log 6}$ $\Rightarrow x=\dfrac{\log 2}{\log 6}-\dfrac{\log 6}{\log 6}$ $\Rightarrow x=\log_6 2-1$	(E)	$\log_6 2-1$