FUNCIONES: CONCEPTOS BÁSICOS

Ejemplos

1. Encuentre el dominio máximo para cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x+1}$

b. $h(x)=\sqrt{x^2-4}$

c. $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt[4]{-2x+3}}$

d. $g(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{(2-x)(1+x)}}$

e. $f(x)=\dfrac{3x^4+2x^2-x}{5}$

Solución

<table>
<tr>
<td>A</td>
<td>Se factoriza el denominador de la función para eliminar los valores donde el mismo sea igual a cero.
$f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$</td>
<td>$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$</td>
</tr>
<tr>
<td>B</td>
<td>Se factoriza el subradical y se elabora su cuadro de signos para garantizar que se mayor o igual que cero.
$h(x)=\sqrt{(x-2)(x+2)}$
<table>
<tr><th></th><th>$-\infty$ … -2</th><th>-2 … 2</th><th>2 … $+\infty$</th></tr>
<tr><td>$(x+2)$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$(x-2)$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td></td><td>$+$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
</table>
</td>
<td>$D_h=\left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right[$</td>
</tr>
<tr>
<td>C</td>
<td>Se resuelve la inecuación para que el subradical sea mayor que cero.</td>
<td>$D_f=\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$</td>
</tr>
</table>

	$-2x+3>0$ $\Rightarrow -2x>-3$ $\Rightarrow x<\frac{-3}{-2}$ $\Rightarrow x<\frac{3}{2}$	
D	Se elabora el cuadro de signos del subradical y no se incluyen los extremos del intervalo porque el denominador debe ser diferente de cero. $\begin{array}{c\|c\|c\|c} & -\infty \quad\quad -1 & \quad\quad 2 & \quad\quad +\infty \\ \hline (1+x) & - & + & + \\ \hline (2-x) & + & + & - \\ \hline & - & + & - \end{array}$	$D_g = \left]-1,2\right[$
E	Se trata de una función polinomial cuyo dominio son todos los números reales.	$D_f = \mathbb{R}$

2. Determine para cada una de las siguientes relaciones si se trata o no de una función.

a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{2x+1}}$

b. $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$
$g(x)=\dfrac{x^2}{4}$

c. $h:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}^{+}\cup\{0\}$
$h(x)=\left|\dfrac{x+1}{2}\right|$

d. $g:\mathbb{R}^{-}\to\mathbb{R}$
$g(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$

e. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$
$f(x)=\sqrt[4]{4-x}$

Solución

A	La imagen de $x = \frac{-1}{2}$ no existe porque indefine el denominador.	No es función
B	Todos los elementos del conjunto $\mathbb{Z}$ tienen una única imagen en $\mathbb{Q}$.	Sí es función.
C	Todos los elementos del conjunto $\mathbb{Q}$ tienen una única imagen en $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.	Sí es función.
D	Todos los elementos del conjunto $\mathbb{R}^-$ tienen una única imagen en $\mathbb{R}$.	Sí es función.
E	No existe la imagen para los números naturales menores que 4.	No es función.

3. Para la función dada encuentre lo que se le solicita.

$$f : \{-2, -1, 3, 5\} \to \mathbb{Q}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{2x}$$

a. Dominio.
b. Codominio.
c. Criterio.
d. Rango.
e. Gráfico.

Solución

A	El dominio es el conjunto de salida.	$\{-2, -1, 3, 5\}$
B	El codominio es el conjunto de llegada.	$\mathbb{Q}$
C	El criterio es la fórmula que permite calcular la imagen para cualquier elemento del dominio.	$f(x) = \frac{x+1}{2x}$
D	El rango es el subconjunto del codominio formado por las imágenes.	$\left\{\frac{1}{4}, 0, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right\}$

	$f(-2)=\dfrac{-2+1}{2\cdot -2}=\dfrac{1}{4}$ $f(-1)=\dfrac{-1+1}{2\cdot -1}=0$ $f(3)=\dfrac{3+1}{2\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$ $f(5)=\dfrac{5+1}{2\cdot 5}=\dfrac{3}{5}$	
E	El gráfico es el conjunto de pares ordenados formados por cada preimagen con su imagen.	$G_f=\left\{\left(-2,\dfrac{1}{4}\right),(-1,0),\left(3,\dfrac{2}{3}\right),\left(5,\dfrac{3}{5}\right)\right\}$

4. Para la función dada asocie cada valor x de la columna de la izquierda con su respectiva imagen en la columna de la derecha escribiendo dentro del paréntesis la letra correspondiente.

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$$
$$f(x)=\frac{2x+1}{3x+1}$$

A	4	( )	$\dfrac{11}{16}$
B	1	( )	$\dfrac{7}{10}$
C	5	( )	$\dfrac{9}{13}$
D	3	( )	$\dfrac{5}{7}$
E	2	( )	$\dfrac{3}{4}$

Solución

A	$f(4)=\dfrac{2\cdot 4+1}{3\cdot 4+1}=\dfrac{9}{13}$	(C)	$\dfrac{11}{16}$
B	$f(1)=\dfrac{2\cdot 1+1}{3\cdot 1+1}=\dfrac{3}{4}$	(D)	$\dfrac{7}{10}$
C	$f(5)=\dfrac{2\cdot 5+1}{3\cdot 5+1}=\dfrac{11}{16}$	(A)	$\dfrac{9}{13}$
D	$f(3)=\dfrac{2\cdot 3+1}{3\cdot 3+1}=\dfrac{7}{10}$	(E)	$\dfrac{5}{7}$
E	$f(2)=\dfrac{2\cdot 2+1}{3\cdot 2+1}=\dfrac{5}{7}$	(B)	$\dfrac{3}{4}$

5. Calcule las preimágenes correspondientes a cada valor según la función dada.

$$h:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$$
$$h(x)=2x^2+1$$

a. 5
b. 1
c. 3
d. 8

Solución

A	$\begin{aligned} & 2x^2+1=5 \\ \Rightarrow\ & 2x^2=5-1 \\ \Rightarrow\ & 2x^2=4 \\ \Rightarrow\ & x^2=\frac{4}{2} \\ \Rightarrow\ & x^2=2 \\ \Rightarrow\ & x=\pm\sqrt{2} \end{aligned}$

B	$2x^2+1=1$ $\Rightarrow 2x^2=1-1$ $\Rightarrow 2x^2=0$ $\Rightarrow x^2=\frac{0}{2}$ $\Rightarrow x^2=0$ $\Rightarrow x=0$
C	$2x^2+1=3$ $\Rightarrow 2x^2=3-1$ $\Rightarrow 2x^2=2$ $\Rightarrow x^2=\frac{2}{2}$ $\Rightarrow x^2=1$ $\Rightarrow x=\pm 1$
D	$2x^2+1=8$ $\Rightarrow 2x^2=8-1$ $\Rightarrow 2x^2=7$ $\Rightarrow x^2=\frac{7}{2}$ $\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$

Ejercicios

1. Encuentre el dominio máximo para cada una de las siguientes funciones:

a. $g(x)=\sqrt{3x-9}$

b. $f(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^3-16x}$

c. $h(x)=\sqrt[4]{x^2-3x}$

d. $f(x)=\dfrac{4x+1}{x^3-x^2+3x-1}$

e. $h(x)=\sqrt[3]{4x-1}$

2. Determine para cada una de las siguientes relaciones si se trata o no de una función.

a. $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$
$g(x)=\dfrac{1}{x}$

b. $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$
$h(x)=2x-4$

c. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(x)=\sqrt{5x+4}$

d. $h:\left]-1,+\infty\right[\to\mathbb{R}$
$h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

e. $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$
$g(x)=\dfrac{x+2}{x-5}$

3. Para la función dada encuentre lo que se le solicita.

$g:\{0,1,2\}\to\mathbb{N}$
$g(x)=4x+6$

a. Dominio.
b. Codominio.
c. Criterio.
d. Ámbito.
e. Gráfico.

4. Para la función dada asocie cada valor x de la columna de la izquierda con su respectiva imagen en la columna de la derecha escribiendo dentro del paréntesis la letra correspondiente.

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$g(x)=x^2+1$$

A	$\sqrt{2}$	( )	$\frac{13}{9}$
B	-2	( )	4
C	$\frac{2}{3}$	( )	3
D	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	( )	$\frac{4}{3}$
E	$\sqrt{3}$	( )	5

5. Calcule las preimágenes correspondientes a cada valor según la función dada.

$$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$$
$$f(x)=\frac{x-1}{3}$$

a. 2

b. $\frac{-3}{2}$

c. $\frac{1}{5}$

d. -4

Soluciones

1.

<table>
<tr><td>A</td><td>Se resuelve la inecuación para que el subradical sea mayor o igual que cero.
$$3x-9\geq 0$$ $$\Rightarrow 3x\geq 9$$ $$\Rightarrow x\geq \frac{9}{3}$$ $$\Rightarrow x\geq 3$$</td><td>$D_g=\left[3,+\infty\right[$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Se factoriza el denominador de la función para eliminar los valores donde el mismo sea igual a cero.
$$f(x)=\frac{x^3+2x}{x(x-4)(x+4)}$$</td><td>$D_f=\mathbb{R}-\{-4,0,4\}$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Se factoriza el subradical y se elabora su cuadro de signos para garantizar que se mayor o igual que cero.
$$h(x)=\sqrt[4]{x(x-3)}$$
<table>
<tr><td></td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$(x-3)$</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$+$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table></td><td>$D_h=\left]-\infty,0\right]\cup\left[3,+\infty\right[$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>Se factoriza el denominador de la función para eliminar los valores donde el mismo sea igual a cero.
$$f(x)=\frac{4x+1}{(x^2+3)(x-1)}$$</td><td>$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$</td></tr>
<tr><td>E</td><td>Se trata de una función radical con índice impar cuyo dominio son todos los números reales.</td><td>$D_h=\mathbb{R}$</td></tr>
</table>

2.

A	Todos los elementos del conjunto $\mathbb{R}^+$ tienen una única imagen en $\mathbb{R}$.	Sí es función
B	Todos los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ tienen una única imagen en $\mathbb{Z}$.	Sí es función.
C	No existe la imagen para los números reales menores que $\frac{-4}{3}$.	No es función.
D	Todos los elementos del intervalo $\left]-1,+\infty\right[$ tienen una única imagen en $\mathbb{R}$.	Sí es función.
E	La imagen de $x=5$ no existe porque indefine el denominador.	No es función.

3.

A	El dominio es el conjunto de salida.	$\{0,1,2\}$
B	El codominio es el conjunto de llegada.	$\mathbb{N}$
C	El criterio es la fórmula que permite calcular la imagen para cualquier elemento del dominio.	$g(x)=4x+6$
D	El ámbito es el subconjunto del codominio formado por las imágenes. $g(0)=4\cdot 0+6=6$ $g(1)=4\cdot 1+6=10$ $g(2)=4\cdot 2+6=14$	$\{6,10,14\}$
E	El gráfico es el conjunto de pares ordenados formados por cada preimagen con su imagen.	$G_f=\{(0,6),(1,10),(2,14)\}$

4.

A	$g\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2+1=3$	(C)	$\frac{13}{9}$
B	$g(-2)=(-2)^2+1=5$	(E)	4
C	$g\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{13}{9}$	(A)	3
D	$g\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1=\frac{4}{3}$	(D)	$\frac{4}{3}$
E	$g\left(\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2+1=4$	(B)	5

5.

A	$\frac{x-1}{3}=2$ $\Rightarrow x-1=2\cdot 3$ $\Rightarrow x-1=6$ $\Rightarrow x=6+1$ $\Rightarrow x=7$
B	$\frac{x-1}{3}=\frac{-3}{2}$ $\Rightarrow x-1=\frac{-3}{2}\cdot 3$ $\Rightarrow x-1=\frac{-9}{2}$ $\Rightarrow x=\frac{-9}{2}+1$ $\Rightarrow x=\frac{-7}{2}$

C	$\frac{x-1}{3}=\frac{1}{5}$ $\Rightarrow x-1=\frac{1}{5}\cdot 3$ $\Rightarrow x-1=\frac{3}{5}$ $\Rightarrow x=\frac{3}{5}+1$ $\Rightarrow x=\frac{8}{5}$
D	$\frac{x-1}{3}=-4$ $\Rightarrow x-1=-4\cdot 3$ $\Rightarrow x-1=-12$ $\Rightarrow x=-12+1$ $\Rightarrow x=-11$