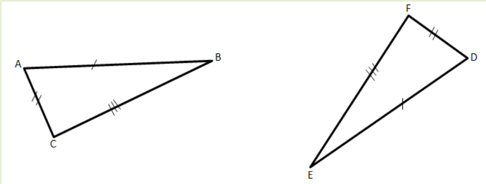
RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Ejemplos

1. Compruebe que la congruencia de triángulos es una relación de equivalencia en geometría plana.

Solución

A	Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes sus tres lados homólogos y sus tres ángulos correspondientes.	 $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
B	La relación es reflexiva porque todo triángulo es congruente con él mismo.	$\Delta ABC \cong \Delta ABC$
C	La relación es simétrica porque si un triángulo es congruente con otro, entonces ese otro triángulo también es congruente con el primero.	$\Delta ABC \cong \Delta DEF \Rightarrow \Delta DEF \cong \Delta ABC$
D	La relación es transitiva porque si un triángulo es congruente con otro y este otro a su vez es congruente con un tercero, entonces el primero es congruente al tercero.	$\Delta ABC \cong \Delta DEF \wedge \Delta DEF \cong \Delta MPQ$ $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta MPQ$
E	Se tiene que la relación de congruencia de triángulos es reflexiva, simétrica y transitiva por lo cual se comprueba que es una relación de equivalencia.	1. $\Delta ABC \cong \Delta ABC$ 2. Si $\Delta ABC \cong \Delta DEF \Rightarrow \Delta DEF \cong \Delta ABC$ 3. Si $\Delta ABC \cong \Delta DEF \wedge \Delta DEF \cong \Delta MPQ$ $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta MPQ$

2. Se define R como la relación que se da entre dos números si ambos pertenecen al conjunto de los números naturales. ¿Es una relación de equivalencia?

Solución

A	Esta relación tiene como condición para que dos números estén relacionados que ambos pertenezcan al conjunto de los números naturales.	Si $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \Rightarrow a\,R\,b$
B	La relación es reflexiva porque si un número pertenece al conjunto de los números naturales se relaciona consigo mismo.	Si $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a\,R\,a$
C	La relación es simétrica porque si un número se relaciona con otro ambos pertenecen al conjunto de los números naturales.	Si $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow a\,R\,b \wedge b\,R\,a$
D	La relación es transitiva porque si un número se relaciona con otro ambos pertenecen al conjunto de los números naturales. Si este otro a su vez se relaciona con un tercero entonces ese tercero también es un número natural y, por lo tanto, el primero se relaciona con el tercero.	Si $a\,R\,b \wedge b\,R\,c$ $\Rightarrow a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow a\,R\,c$
E	Se tiene que la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva por lo cual se comprueba que es una relación de equivalencia.	1. $a\,R\,a$ 2. Si $a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$ 3. Si $a\,R\,b \wedge b\,R\,c$ $\Rightarrow a\,R\,c$

Ejercicios

1. Considere la siguiente relación R: Si la suma de dos números enteros es un número entero, entonces los dos números se relacionan. ¿Es una relación de equivalencia?

2. Considere la siguiente relación R: Si el producto de dos números reales es un número racional, entonces los dos números se relacionan. ¿Es una relación reflexiva?, ¿es una relación simétrica?, ¿es una relación transitiva?, ¿es una relación de equivalencia?

Soluciones

1. Se analizan las características de la relación.

A	Esta relación tiene como condición para que dos números enteros estén relacionados que la suma de ambos dé como resultado un número entero.	Si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} \wedge a\ R\ b \Rightarrow a + b = c \in \mathbb{Z}$
B	La relación es reflexiva porque si un número pertenece al conjunto de los números enteros al sumarlo consigo mismo el resultado es un número entero.	Si $a \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a + a = 2a \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a\ R\ a$
C	La relación es simétrica porque si un número se relaciona con otro es porque la suma de ambos da como resultado un número entero y la suma es conmutativa en el conjunto de los números enteros.	Si $a\ R\ b$ $\Rightarrow a + b = c \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow b + a = c \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow b\ R\ a$

D	La relación es transitiva porque si un número se relaciona con otro es porque al sumarlos da un número entero. Si este otro a su vez se relaciona con un tercero entonces esa suma también da un número entero y, por lo tanto, el primero se relaciona con el tercero.	Si $a\ R\ b \wedge b\ R\ c$ $\Rightarrow a + b = k \in \mathbb{Z} \wedge b + c = d \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a + d - c = k$ $\Rightarrow a + d - c + 2c = k + 2c$ $\Rightarrow a + c = k + 2c - d \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a\ R\ c$
E	Se tiene que la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva por lo cual se comprueba que es una relación de equivalencia.	1. $a\ R\ a$ 2. Si $a\ R\ b \Rightarrow b\ R\ a$ 3. Si $a\ R\ b \wedge b\ R\ c$ $\Rightarrow a\ R\ c$

2. Se analizan las características de la relación.

A	Esta relación tiene como condición para que dos números reales estén relacionados que el producto de ambos sea un número racional.	Si $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \wedge a\ R\ b$ $\Rightarrow a \cdot b = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$
B	La relación no es reflexiva porque si un número pertenece al conjunto de los números reales no necesariamente se relaciona consigo mismo.	Si $a \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow a \cdot a = k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow k \in \mathbb{Q} \vee k \notin \mathbb{Q}$
C	La relación es simétrica porque si un número real se relaciona con otro número real, es porque su producto pertenece al conjunto de los números racionales y la multiplicación es conmutativa en el conjunto de los números reales.	Si $a\ R\ b$ $\Rightarrow a \cdot b = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow b \cdot a = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow b\ R\ a$

D	La relación es transitiva porque si un número se relaciona con otro su producto pertenece al conjunto de los números racionales. Si este otro a su vez se relaciona con un tercero entonces ese producto también es un número racional y, por lo tanto, el primero se relaciona con el tercero.	Si $a\,R\,b \wedge b\,R\,c$ $\Rightarrow a \cdot b = \frac{k}{d} \in \mathbb{Q} \wedge b \cdot c = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow a \cdot \frac{e}{cf} = \frac{k}{d}$ $\Rightarrow ac \cdot \frac{e}{f} = \frac{kc^2}{d}$ $\Rightarrow ac = \frac{fkc^2}{ed} \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow a\,R\,c$
E	Se tiene que la relación R es simétrica y transitiva, pero no es reflexiva, por lo cual se comprueba que no es una relación de equivalencia.	1. $a \not R\, a$ 2. Si $a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$ 3. Si $a\,R\,b \wedge b\,R\,c$ $\Rightarrow a\,R\,c$