RACIONALIZACIÓN DE UNA EXPRESIÓN FRACCIONARIA CON RADICAL EN EL DENOMINADOR

Ejemplos

1. Racionalice y simplifique la expresión $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Solución

Se aplica la propiedad de la raíz de un cociente.	$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
Se racionaliza el denominador y se simplifica.	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3^2}}$ $= \frac{\sqrt{6}}{3}$

2. Racionalice y simplifique la expresión $\sqrt{\frac{2}{6a}}$, con $a > 0$.

Solución

Se aplica la propiedad de la raíz de un cociente.	$\sqrt{\frac{2}{6a}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6a}}$

Se racionaliza el denominador y se simplifica.	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6a}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6a}} \cdot \frac{\sqrt{6a}}{\sqrt{6a}}$ $= \frac{\sqrt{12a}}{\sqrt{(6a)^2}}$ $= \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3a}}{6a}$ $= \frac{2\sqrt{3a}}{6a}$ $= \frac{\sqrt{3a}}{3a}$

3. Racionalice y simplifique la expresión $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Solución

Se aplica la propiedad de la raíz de un cociente.	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
Se racionaliza el denominador y se simplifica.	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}$ $= \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}$ $= \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

4. Racionalice y simplifique la expresión $\sqrt[5]{\frac{36m^2}{9n^4}}$, con $n \neq 0$.

Solución

Se aplica la propiedad de la raíz de un cociente.	$\sqrt[5]{\frac{36m^2}{9n^4}} = \frac{\sqrt[5]{36m^2}}{\sqrt[5]{9n^4}} = \frac{\sqrt[5]{2^2 \cdot 3^2 m^2}}{\sqrt[5]{3^2 n^4}}$

Se racionaliza el denominador y se simplifica.	$\dfrac{\sqrt[5]{2^2\cdot 3^2m^2}}{\sqrt[5]{3^2n^4}} = \dfrac{\sqrt[5]{2^2\cdot 3^2m^2}}{\sqrt[5]{3^2n^4}}\cdot\dfrac{\sqrt[5]{3^3n}}{\sqrt[5]{3^3n}}$ $= \dfrac{\sqrt[5]{2^2\cdot 3^5m^2n}}{\sqrt[5]{3^5n^5}}$ $= \dfrac{3\sqrt[5]{4m^2n}}{3n}$ $= \dfrac{\sqrt[5]{4m^2n}}{n}$

5. Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{1-m}{1-\sqrt{m}}$, con $m \geq 0$ y $m \neq 1$.

Solución

Se determina el conjugado del denominador.	El conjugado de $1-\sqrt{m}$ es $1+\sqrt{m}$.
Se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado encontrado. Luego se simplifica.	$\dfrac{1-m}{1-\sqrt{m}} = \dfrac{1-m}{1-\sqrt{m}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$ $= \dfrac{(1-m)(1+\sqrt{m})}{1^2-(\sqrt{m})^2}$ $= \dfrac{(1-m)(1+\sqrt{m})}{1-m}$ $= (1+\sqrt{m})$

6. Racionalice y simplifique la expresión $\dfrac{2\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Solución

Se determina el conjugado del denominador.	El conjugado de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es $\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

Se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado encontrado. Luego se simplifica.	$\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $= \frac{2\sqrt{8}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$ $= \frac{2\sqrt{2^3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{2-3}$ $= \frac{2\sqrt{2^4}-2\sqrt{2^3\cdot 3}}{-1}$ $= \frac{2\sqrt{2^4}-2\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 3}}{-1}$ $= -\left(2\cdot 2^2-2\cdot 2\sqrt{6}\right)$ $= -\left(8-4\sqrt{6}\right)$ $= 4\sqrt{6}-8$

Ejercicios

1. Racionalice y simplifique cada expresión.

a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{-a^3b}{2\sqrt{ab}}$, con $a > 0$ y $b > 0$

d) $\sqrt[3]{\frac{3}{k^2}}$, con $k \neq 0$

e) $\frac{-2a^2b^3}{6\sqrt[7]{a^3b^2}}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

f) $\frac{2}{2-\sqrt{a}}$, con $a > 0$

g) $\frac{2x}{\sqrt{x}-2x\sqrt{2}}$, con $x > 0$

h) $\frac{-3\sqrt{2x}}{1-3\sqrt{2x}}$, con $x > 0$

Soluciones

1. Racionalice y simplifique cada expresión.

a) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{3}{5}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}}\\ &= \frac{\sqrt{15}}{5}\end{aligned}$$

b) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}$$
$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

c) $\frac{-a^3b}{2\sqrt{ab}}$, con $a > 0$ y $b > 0$

$$\frac{-a^3b}{2\sqrt{ab}} = \frac{-a^3b}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$
$$= \frac{-a^3b\sqrt{ab}}{2\sqrt{a^2b^2}}$$
$$= \frac{-a^3b\sqrt{ab}}{2ab}$$
$$= \frac{-a^2\sqrt{ab}}{2}$$

d) $\sqrt[3]{\frac{3}{k^2}}$, con $k \neq 0$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{k^2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{k^2}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{k^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{3k}}{\sqrt[3]{k^3}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{3k}}{k}$$

e) $\frac{-2a^2b^3}{6\sqrt[7]{a^3b^2}}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$

$$\frac{-2a^2b^3}{6\sqrt[7]{a^3b^2}} = \frac{-2a^2b^3}{6\sqrt[7]{a^3b^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{a^4b^5}}{\sqrt[7]{a^4b^5}}$$
$$= \frac{-2a^2b^3\sqrt[7]{a^4b^5}}{6\sqrt[7]{a^7b^7}}$$
$$= \frac{-2a^2b^3\sqrt[7]{a^4b^5}}{6ab}$$
$$= \frac{-ab^2\sqrt[7]{a^4b^5}}{3}$$

f) $\dfrac{2}{2-\sqrt{a}}$, con $a > 0$

$$\frac{2}{2-\sqrt{a}} = \frac{2}{2-\sqrt{a}} \cdot \frac{2+\sqrt{a}}{2+\sqrt{a}}$$
$$= \frac{2\left(2+\sqrt{a}\right)}{2^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2}$$
$$= \frac{4+2\sqrt{a}}{4-a}$$

g) $\dfrac{2x}{\sqrt{x}-2x\sqrt{2}}$, con $x > 0$

$$\frac{2x}{\sqrt{x}-2x\sqrt{2}} = \frac{2x}{\sqrt{x}-2x\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}+2x\sqrt{2}}{\sqrt{x}+2x\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2x\left(\sqrt{x}+2x\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(2x\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \frac{2x\left(\sqrt{x}+2x\sqrt{2}\right)}{x - (2x)^2\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \frac{2x\sqrt{x}+4x^2\sqrt{2}}{x-4x^2\cdot 2}$$
$$= \frac{2x\sqrt{x}+4x^2\sqrt{2}}{x-8x^2}$$
$$= \frac{x\left(2\sqrt{x}+4x\sqrt{2}\right)}{x(1-8x)}$$
$$= \frac{2\sqrt{x}+4x\sqrt{2}}{1-8x}$$

h) $\dfrac{-3\sqrt{2x}}{1-3\sqrt{2x}}$, con $x>0$

$$\begin{aligned}\frac{-3\sqrt{2x}}{1-3\sqrt{2x}} &= \frac{-3\sqrt{2x}}{1-3\sqrt{2x}}\cdot\frac{1+3\sqrt{2x}}{1+3\sqrt{2x}}\\ &= \frac{-3\sqrt{2x}\left(1+3\sqrt{2x}\right)}{1^2-\left(3\sqrt{2x}\right)^2}\\ &= \frac{-3\sqrt{2x}-9\sqrt{(2x)^2}}{1-3^2\left(\sqrt{2x}\right)^2}\\ &= \frac{-3\sqrt{2x}-18x}{1-9\cdot 2x}\\ &= \frac{-3\sqrt{2x}-18x}{1-18x}\end{aligned}$$