



RAÍZ DE UNA RADICAL

Ejemplos

1. Simplifique la expresión $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplican los índices

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt{2}} &= \sqrt[3 \cdot 2]{2} \\ &= \sqrt[6]{2} \end{aligned}$$

Recuerde:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$$

2. Simplifique la expresión $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{144m^8}}}$, con $m \geq 0$.

Solución

Se multiplican los índices

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{144m^8}}} &= \sqrt[3 \cdot 4 \cdot 2]{144m^8} \\ &= \sqrt[24]{144m^8} \end{aligned}$$

Se simplifica la expresión obtenida

$$\begin{aligned} \sqrt[24]{144m^8} &= \sqrt[24]{3^2 \cdot 2^4 \cdot m^8} \\ &= \sqrt[12]{3 \cdot 2^2 \cdot m^4} \\ &= \sqrt[12]{12m^4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{144m^8}}} = \sqrt[12]{12m^4}$.



3. Simplifique la expresión $\frac{1}{2a} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{256a^9}{b^2}}}}$, con $a > 0$ y $b > 0$.

Solución

Se multiplican los índices

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{256a^9}{b^2}}}} &= \frac{1}{2a} \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{\frac{256a^9}{b^2}} \\ &= \frac{1}{2a} \sqrt[8]{\frac{256a^9}{b^2}} \end{aligned}$$

Se simplifica la expresión obtenida

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} \sqrt[8]{\frac{256a^9}{b^2}} &= \frac{1}{2a} \sqrt[8]{2^8 \cdot a^8 \cdot a}{b^2} \\ &= \frac{1}{2a} \cdot 2a^8 \sqrt[8]{\frac{a}{b^2}} \\ &= \sqrt[8]{\frac{a}{b^2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{1}{2a} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{256a^9}{b^2}}}} = \sqrt[8]{\frac{a}{b^2}}$.

4. Simplifique la expresión $\sqrt{5p^3\sqrt{2}}$, con $p \geq 0$.

Solución

Se introduce $5p$ en el radical de índice 3:

$$\sqrt{5p^3\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot (5p)^3} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot 5^3 p^3}$$


Se multiplican los índices

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot 5^3 p^3} &= \sqrt[2 \cdot 3]{2 \cdot 5^3 p^3} \\ &= \sqrt[6]{2 \cdot 5^3 p^3} \\ &= \sqrt[6]{250p^3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{5p^3\sqrt{2}} = \sqrt[6]{250p^3}$.



5. Determine el valor de n en $\sqrt[n]{\sqrt{3^8}} = \sqrt[3]{3}$.

Solución

Se simplifica la primera expresión:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\sqrt{3^8}} &= \sqrt[2n]{3^8} \\ &= \sqrt[n]{3^4} \end{aligned}$$

Se igualan las expresiones:

$$\sqrt[n]{3^4} = \sqrt[3]{3}$$

Para resolver, se pueden expresar ambos términos en notación de potencia y se igualan los exponentes porque las potencias tienen la misma base:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[n]{3^4} &= 3^{\frac{4}{n}} \\ \sqrt[3]{3} &= 3^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \right\} \quad 3^{\frac{4}{n}} = 3^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{n} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad n = 12$$



Ejercicios

1. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2p}}$, con $p \geq 0$

b) $-8\sqrt[4]{3}$

c) $2\sqrt[3]{\sqrt[4]{4m^6}}$, con $m \geq 0$

d) $\sqrt{\sqrt[5]{36}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^6b^9}{c^{12}}}}$, con $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $c > 0$

f) $-3\sqrt{3\sqrt{27a^3b^7}}$, con $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

g) $\frac{5}{2}\sqrt{x\sqrt[3]{\sqrt{y^4}}}$, con $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

h) $\sqrt{2\sqrt[3]{16} + 6\sqrt[3]{2}}$

2. Determine el valor de x en la expresión $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{64}} = \sqrt[4]{2}$.



Soluciones

1. Una manera de obtener el resultado solicitado es la siguiente:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2p}}$, con $p \geq 0$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt{2p}} &= \sqrt[3 \cdot 2]{2p} \\ &= \sqrt[6]{2p}\end{aligned}$$

b) $-8\sqrt[4]{3}$

$$\begin{aligned}-8\sqrt[4]{3} &= -8^{4 \cdot \frac{1}{4}} \\ &= -8^{12 \cdot \frac{1}{4}}\end{aligned}$$

c) $2\sqrt[3]{\sqrt[4]{4m^6}}$, con $m \geq 0$

$$\begin{aligned}2\sqrt[3]{\sqrt[4]{4m^6}} &= 2^{3 \cdot \frac{1}{4}} \sqrt[2^2]{2^2 m^6} \\ &= 2^{12 \cdot \frac{1}{4}} \sqrt[2^2]{2^2 m^6} \\ &= 2\sqrt[2]{2m^3}\end{aligned}$$

d) $\sqrt{\sqrt[5]{36}}$

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[5]{36}} &= \sqrt[2 \cdot 5]{36} \\ &= \sqrt[20]{2^2 \cdot 3^2} \\ &= \sqrt[10]{2 \cdot 3} \\ &= \sqrt[10]{6}\end{aligned}$$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{a^6 b^9}{c^{12}}}}$, con $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $c > 0$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{a^6 b^9}{c^{12}}}} &= \sqrt[3 \cdot 4]{\frac{a^6 b^9}{c^{12}}} \\ &= \sqrt[12]{\frac{a^6 b^9}{c^{12}}} \\ &= \frac{1}{c} \sqrt[12]{a^6 b^9} \\ &= \frac{1}{c} \sqrt[4]{a^2 b^3}\end{aligned}$$



f) $-3\sqrt{3\sqrt{27a^3b^7}}$, con $a \geq 0$ y $b \geq 0$

$$\begin{aligned}
 -3\sqrt{3\sqrt{27a^3b^7}} &= -3\sqrt{\sqrt{3^2 \cdot 3^3 a^3 b^7}} \\
 &= -3^2 \sqrt[2]{3^5 a^3 b^7} \\
 &= -3^4 \sqrt[4]{3^5 a^3 b^7} \\
 &= -3^4 \sqrt[4]{3^4 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot b^3} \\
 &= -3 \cdot 3b^4 \sqrt[4]{3a^3 b^3} \\
 &= -9b^4 \sqrt[4]{3a^3 b^3}
 \end{aligned}$$

g) $\frac{5}{2}\sqrt{x^3\sqrt{y^4}}$, con $x \geq 0$ y $y \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{2}\sqrt{x^3\sqrt{y^4}} &= \frac{5}{2}\sqrt{x^{3 \cdot 2} y^4} \\
 &= \frac{5}{2}\sqrt{x^6 y^4} \\
 &= \frac{5}{2}\sqrt[6]{x^6 y^4} \\
 &= \frac{5}{2} x^{2 \cdot 6} y^4 \\
 &= \frac{5}{2} x^{12} y^4 \\
 &= \frac{5}{2} \sqrt[6]{x^3 y^2}
 \end{aligned}$$

h) $\sqrt{2^3\sqrt{16} + 6^3\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2^3\sqrt{16} + 6^3\sqrt{2}} &= \sqrt{2^3 \sqrt{2^3 \cdot 2} + 6^3 \sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{2 \cdot 2^3 \sqrt{2} + 6^3 \sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{4^3 \sqrt{2} + 6^3 \sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{10^3 \sqrt{2}} \\
 &= \sqrt[3]{10^3 \cdot 2} \\
 &= \sqrt[2 \cdot 3]{10^3 \cdot 2} \\
 &= \sqrt[6]{10^3 \cdot 2}
 \end{aligned}$$



2. Determine el valor de x en la expresión $\sqrt[3]{x\sqrt{64}} = \sqrt[4]{2}$.

Se simplifica la primera expresión:

$$\sqrt[3]{x\sqrt{64}} = 2 \cdot \sqrt[3]{x} \sqrt{64} = 6\sqrt[3]{x} \sqrt{64} = 6\sqrt[3]{x} 2^3 = 8\sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{2}$$

Se igualan las expresiones

$$8\sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{2} \implies x = 4$$