POTENCIA DE UN RADICAL

Recuerde:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$

Ejemplos

1. Simplifique la expresión $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5$.

Solución

Se aplica la propiedad de la potencia de una raíz:

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^5 = \sqrt[3]{2^5}$$

Se simplifica el resultado:

$$\sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

Por lo tanto, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^5 = 2\sqrt[3]{4}$.

2. Simplifique la expresión $\left(\sqrt{8a^3}\right)^3$, con $a \geq 0$.

Solución

Se aplica la propiedad de la potencia de una raíz:

$$\left(\sqrt{8a^3}\right)^3 = \sqrt{\left(2^3 \cdot a^3\right)^3} = \sqrt{2^9 \cdot a^9}$$

Se simplifica el resultado:

$$\sqrt{2^9 \cdot a^9} = \sqrt{2^8 \cdot 2 \cdot a^8 \cdot a} = 2^4 a^4 \sqrt{2a} = 16a^4\sqrt{2a}$$

Por lo tanto, $\left(\sqrt{8a^3}\right)^3 = 16a^4\sqrt{2a}$.

3. Simplifique la expresión $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab}{12}}\right)^3$, con $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Solución

Se eleva la expresión al exponente 3 y se aplica la propiedad de la potencia de una raíz:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab}{12}}\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\sqrt{\frac{ab}{2^2\cdot 3}}\right)^3\\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\left(\frac{ab}{2^2\cdot 3}\right)^3}\\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{a^3b^3}{2^6\cdot 3^3}}\end{aligned}$$

Se simplifica el resultado:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\sqrt{\frac{a^3b^3}{2^6\cdot 3^3}} &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{a^2\cdot a\cdot b^2\cdot b}{2^6\cdot 3^2\cdot 3}}\\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{ab}{2^3\cdot 3}\sqrt{\frac{ab}{3}}\\ &= \frac{ab}{192}\sqrt{\frac{ab}{3}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab}{12}}\right)^3 = \frac{ab}{192}\sqrt{\frac{ab}{3}}$.

4. Simplifique la expresión $\left[\left(\sqrt{\frac{18m}{5}}\right)^2\right]^3$, con $m \geq 0$.

Solución

Se eleva la expresión a los exponentes:

$$\left[\left(\sqrt{\frac{18m}{5}}\right)^2\right]^3 = \left(\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2 \cdot m}{5}}\right)^{2\cdot 3}$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2 \cdot m}{5}}\right)^{6}$$

Se aplica la propiedad de la potencia de una raíz:

$$\left(\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2 \cdot m}{5}}\right)^{6} = \sqrt{\frac{2^6 \cdot 3^{12} \cdot m^6}{5^6}}$$

Se simplifica el resultado:

$$\sqrt{\frac{2^6 \cdot 3^{12} \cdot m^6}{5^6}} = \frac{2^3 \cdot 3^6 \cdot m^3}{5^3}$$

$$= \frac{5\,832m^3}{125}$$

Por lo tanto, $\left[\left(\sqrt{\frac{18m}{5}}\right)^2\right]^3 = \frac{5\,832m^3}{125}$.

5. Determine el valor de x en $\left(\sqrt[3]{4a}\right)^x = 2\sqrt[3]{2a^2}$.

Solución

Se aplica la propiedad de la potencia de una raíz en la primera expresión:

$$\left(\sqrt[3]{4a}\right)^x = \sqrt[3]{\left(2^2 \cdot a\right)^x} = \sqrt[3]{2^{2x} \cdot a^x}$$

Se introduce el coeficiente en la segunda expresión:

$$2\sqrt[3]{2a^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2a^2} = \sqrt[3]{2^4 a^2}$$

Se igualan las dos expresiones obtenidas anteriormente:

$$\sqrt[3]{2^{2x} \cdot a^x} = \sqrt[3]{2^4 a^2}$$

Esta igualdad se cumple si $x = 2$.

Ejercicios

1. Determine la potencia de la raíz que se solicita en cada caso.

a) $\left(\sqrt[3]{5k}\right)^2$

b) $\left(\sqrt[4]{3m}\right)^{-2}$, con $m > 0$

c) $\left(-2\sqrt[3]{25a^2}\right)^4$

d) $\left[\left(\sqrt{2a^3b}\right)^3\right]^2$, con $a \geq 0$ y $b \geq 0$

e) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^2}{c^5}}\right)^5$, con $c > 0$

f) $\left(-3\sqrt{3\sqrt{3a^3}}\right)^2$, con $a \geq 0$

g) $\left[\left(\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{2x}{y^3}}\right)^3\right]^2$, con $x \geq 0$ y $y > 0$

2. Determine el valor de x en la expresión $\left[\left(\sqrt{a}\right)^4\right]^x = a^{16}$, con $a > 0$.

Soluciones

1. Una forma de obtener el resultado solicitado es la siguiente:

a) $\left(\sqrt[3]{5k}\right)^2$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{5k}\right)^2 &= \sqrt[3]{(5k)^2}\\ &= \sqrt[3]{5^2k^2}\\ &= \sqrt[3]{25k^2}\end{aligned}$$

b) $\left(\sqrt[4]{3m}\right)^{-2}$, con $m > 0$

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[4]{3m}\right)^{-2} &= \sqrt[4]{(3m)^{-2}}\\ &= \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3m}\right)^2}\\ &= \sqrt[4]{\frac{1}{9m^2}}\end{aligned}$$

c) $\left(-2\sqrt[3]{25a^2}\right)^4$

$$\begin{aligned}\left(-2\sqrt[3]{25a^2}\right)^4 &= (-2)^4\left(\sqrt[3]{5^2a^2}\right)^4\\ &= 16\sqrt[3]{\left(5^2a^2\right)^4}\\ &= 16\sqrt[3]{5^8a^8}\\ &= 16\sqrt[3]{5^6\cdot 5^2\cdot a^6\cdot a^2}\\ &= 16\cdot 5^2\cdot a^2\sqrt[3]{5^2a^2}\\ &= 400a^2\sqrt[3]{25a^2}\end{aligned}$$

d) $\left[\left(\sqrt{2a^3b}\right)^3\right]^2$, con $a \geq 0$ y $b \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\left[\left(\sqrt{2a^3b}\right)^3\right]^2 &= \left(\sqrt{2a^3b}\right)^{3\cdot 2} \\
&= \left(\sqrt{2a^3b}\right)^6 \\
&= \sqrt{\left(2a^3b\right)^6} \\
&= \sqrt{2^6 a^{18} b^6} \\
&= 2^3 a^9 b^3 \\
&= 8a^9b^3
\end{aligned}
$$

e) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^2}{c^5}}\right)^5$, con $c > 0$

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{\frac{a^2b^2}{c^5}}\right)^5 &= \sqrt[3]{\left(\frac{a^2b^2}{c^5}\right)^5} \\
&= \sqrt[3]{\frac{a^{10}b^{10}}{c^{25}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{a^9 \cdot a \cdot b^9 \cdot b}{c^{24} \cdot c}} \\
&= \frac{a^3b^3}{c^8}\sqrt[3]{\frac{ab}{c}}
\end{aligned}
$$

f) $\left(-3\sqrt{3\sqrt{3a^3}}\right)^2$, con $a \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\left(-3\sqrt{3\sqrt{3a^3}}\right)^2 &= \left(-3\sqrt{\sqrt{3^2 \cdot 3a^3}}\right)^2 \\
&= \left(-3\sqrt{\sqrt{3^3a^3}}\right)^2 \\
&= \left(-3\sqrt[4]{3^3a^3}\right)^2 \\
&= (-3)^2\left(\sqrt[4]{3^3a^3}\right)^2 \\
&= 9\sqrt[4]{\left(3^3a^3\right)^2} \\
&= 9\sqrt[4]{3^6a^6} \\
&= 9\sqrt[4]{3^4 \cdot 3^2 \cdot a^4 \cdot a^2} \\
&= 9 \cdot 3a\sqrt[4]{3^2a^2} \\
&= 27a\sqrt{3a}
\end{aligned}
$$

g) $\left[\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2x}{y^3}}\right)^3\right]^2$, con $x \geq 0$ y $y > 0$

$$\left[\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2x}{y^3}}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2x}{y^3}}\right)^{3\cdot 2}$$

$$= \left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2x}{y^3}}\right)^6$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^6\left(\sqrt{\frac{2x}{y^3}}\right)^6$$

$$= \frac{5^6}{2^6}\sqrt{\left(\frac{2x}{y^3}\right)^6}$$

$$= \frac{5^6}{2^6}\sqrt{\frac{2^6x^6}{y^{18}}}$$

$$= \frac{5^6}{2^6}\cdot\frac{2^3x^3}{y^9}$$

$$= \frac{5^6\cdot 2^3x^3}{2^6y^9}$$

2. Para determinar el valor de x en la expresión $\left[\left(\sqrt{a}\right)^4\right]^x = a^{16}$, con $a \geq 0$, se puede trabajar de la siguiente manera:

Se simplifica la primera expresión:

$$\left[\left(\sqrt{a}\right)^4\right]^x = \left(\sqrt{a}\right)^{4x} = \sqrt{a^{4x}} = a^{2x}$$

Se igualan las expresiones

$$a^{2x} = a^{16} \Rightarrow x = 8$$