EXPONENTES FRACCIONARIOS Y EXPRESIONES RADICALES

Ejemplos

1. Expresar $2^{\frac{3}{5}}$ en notación radical.

Solución

$2^{\frac{3}{5}}$

El numerador del exponente es el exponente del subradical.

El denominador del exponente es el índice de la raíz.

$\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$

Por lo tanto: $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{8}$

2. Simplificar la expresión $\sqrt[6]{m^3}$. Considere que $m \geq 0$.

Solución

1	Se expresa $\sqrt[6]{m^3}$ en notación de potencia.	$\sqrt[6]{m^3} = m^{\frac{3}{6}}$
2	Se simplifica el exponente de la potencia.	$m^{\frac{3}{6}} = m^{\frac{1}{2}}$
3	Se pasa nuevamente a notación radical.	$m^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m}$

Por lo tanto: $\sqrt[6]{m^3} = \sqrt{m}$

3. Determinar el valor de n para que se cumpla la igualdad $5^n = \sqrt[3]{25}$.

Solución

1	Se expresa $\sqrt[3]{25}$ en notación de potencia.	$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2}$ $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$
2	Se determina el valor de n.	$5^n = 5^{\frac{2}{3}}$ si $n = \frac{2}{3}$

4. Determinar para qué valores de n y m se cumple la igualdad $2^{\frac{5}{n}} = \sqrt[m]{32}$.
Dar dos ejemplos.

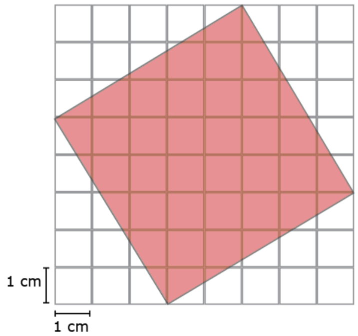
Solución

1	Se expresa $\sqrt[m]{32}$ en notación de potencia.	$\sqrt[m]{32} = \sqrt[m]{2^5}$ $\sqrt[m]{2^5} = 2^{\frac{5}{m}}$
2	Se determina el valor de n y de m.	$2^{\frac{5}{n}} = 2^{\frac{5}{m}}$ Esto implica que: $\frac{5}{n} = \frac{5}{m}$ La igualdad se cumple si: $n = m$

Dos ejemplos son:

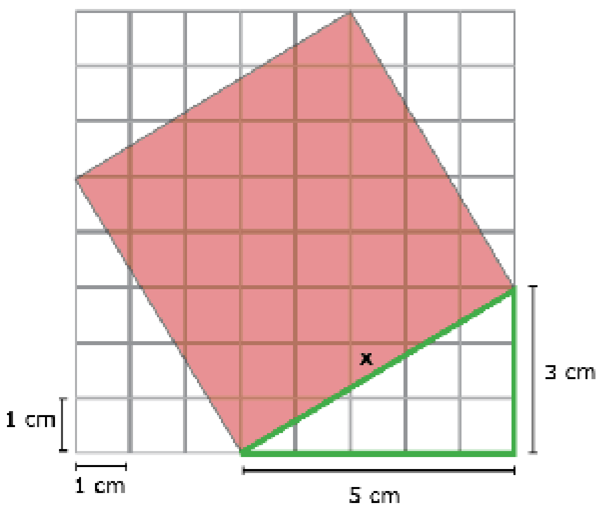
- Si $n = m = 2$: ⇨ $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5}$
- Si $n = m = 7$: ⇨ $2^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{32} = \sqrt[7]{2^5}$

5. Exprese, en notación de potencia, la medida del lado del cuadrado rojo de la figura.



Solución

Cada lado del cuadrado rojo corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que los catetos miden 5 cm y 3 cm.



Se usa el teorema de Pitágoras para determinar la medida del lado del cuadrado (x):

$$x^2 = 5^2 + 3^2$$
$$x^2 = 25 + 9$$
$$x^2 = 34$$
$$x = \sqrt{34}$$

La medida de cada lado del cuadrado es $x = \sqrt{34}$.

Su expresión en notación de potencia es $x = 34^{\frac{1}{2}}$.

Ejercicios

1. Exprese cada potencia en notación radical.

a) $5^{\frac{4}{7}}$

b) $2^{\frac{1}{3}}$

c) $3^{0,2}$

d) $2^{0,\overline{6}}$

2. Exprese cada radical en notación de potencia.

a) $\sqrt[4]{125}$

b) $\sqrt{8}$

c) $\sqrt[4]{m^3n^3}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$.

d) $\sqrt[5]{4a^2}$

3. Determinar el valor de n en cada caso.

a) $3^n = \sqrt[3]{81}$

b) $\sqrt[3]{4} = 2^n$

c) $\sqrt[4]{27} = 3^{\frac{3}{n}}$

d) $2^{\frac{n}{2}} = \sqrt[6]{8}$

4. Determine las dimensiones de un terreno rectangular si se sabe que su largo mide al doble de su ancho y su área es de $1\ 152\ m^2$.

Soluciones

1. Exprese cada potencia en notación radical.

a) $5^{\frac{4}{7}}$

El numerador del exponente es el exponente del subradical.

$5^{\frac{4}{7}}$ $\qquad \sqrt[7]{5^4} = \sqrt[7]{625}$

El denominador del exponente es el índice de la raíz.

Por lo tanto, $5^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{625}$.

b) $2^{\frac{1}{3}}$

El numerador del exponente es el exponente del subradical.

$2^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2}$

El denominador del exponente es el índice de la raíz.

Por lo tanto: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

c) $3^{0,2}$

El numerador del exponente es el exponente del subradical.

$3^{0,2} = 3^{\frac{1}{5}}$ $\qquad \sqrt[5]{3^1} = \sqrt[5]{3}$

El denominador del exponente es el índice de la raíz.

Por lo tanto: $3^{0,2} = \sqrt[5]{3}$

d) $2^{0,\bar{6}}$

El numerador del exponente es el exponente del subradical.

$$2^{0,\bar{6}} = 2^{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

El denominador del exponente es el índice de la raíz.

Por lo tanto: $2^{0,\bar{6}} = \sqrt[3]{4}$

2. Exprese cada radical en notación de potencia.

a) $\sqrt[4]{125}$

El exponente del subradical es el numerador del exponente.

$$\sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5^3} \qquad 5^{\frac{3}{4}}$$

El índice de la raíz es el denominador del exponente.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{125} = 5^{\frac{3}{4}}$.

b) $\sqrt{8}$

El exponente del subradical es el numerador del exponente.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} \qquad 2^{\frac{3}{2}}$$

El índice de la raíz es el denominador del exponente.

Por lo tanto, $\sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$.

c) $\sqrt[4]{m^3n^3}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$.

El exponente del subradical es el numerador del exponente.

$\sqrt[4]{m^3n^3} = \sqrt[4]{(mn)^3}$ $\qquad (mn)^{\frac{3}{4}}$

El índice de la raíz es el denominador del exponente.

Por lo tanto, $\sqrt[4]{m^3n^3} = (mn)^{\frac{3}{4}}$.

d) $\sqrt[5]{4a^2}$

El exponente del subradical es el numerador del exponente.

$\sqrt[5]{4a^2} = \sqrt[5]{(2a)^2}$ $\qquad (2a)^{\frac{2}{5}}$

El índice de la raíz es el denominador del exponente.

Por lo tanto, $\sqrt[5]{4a^2} = (2a)^{\frac{2}{5}}$.

3. Determinar el valor de n en cada caso.

a) $3^n = \sqrt[3]{81}$

A	Se expresa $\sqrt[3]{81}$ en notación de potencia.	$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}$
B	Se determina el valor de n.	$3^n = 3^{\frac{4}{3}}$, si $n = \dfrac{4}{3}$

b) $\sqrt[3]{4} = 2^n$

A	Se expresa $\sqrt[3]{4}$ en notación de potencia.	$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$
B	Se determina el valor de n.	$2^n = 2^{\frac{2}{3}}$, si $n = \dfrac{2}{3}$

c) $\sqrt[4]{27} = 3^{\frac{3}{n}}$

A	Se expresa $\sqrt[4]{27}$ en notación de potencia.	$\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}$
B	Se determina el valor de n.	$3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{n}}$, si $\frac{3}{4} = \frac{3}{n}$

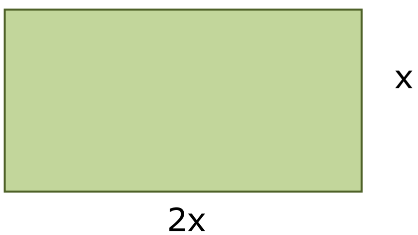
Por lo tanto, $n = 4$.

d) $2^{\frac{n}{2}} = \sqrt[6]{8}$

A	Se expresa $\sqrt[6]{8}$ en notación de potencia.	$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}$
B	Se determina el valor de n.	$2^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$, si $\frac{n}{2} = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, $n = 1$.

4. Determine las dimensiones de un terreno rectangular si se sabe que su largo mide al doble de su ancho y su área es de $1\ 152\ m^2$.



$$
\begin{aligned}
A = x \cdot 2x &= 1152 \\
2x^2 &= 1152 \\
x^2 &= 576 \\
x &= \sqrt{576} \\
x &= 24
\end{aligned}
$$

Las dimensiones del terreno son $24\ m$ y $48\ m$.