SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejemplos

1. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{2a}-\frac{b-2a}{2a}$. Considere $a \neq 0$.

Solución
Es una suma y una resta de expresiones algebraicas homogéneas porque todas tienen el mismo denominador.

$$\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{2a}-\frac{b-2a}{2a}$$

Se conserva el denominador y se resuelve la suma y la resta de los numeradores.

$$\frac{(a+b)+(a-b)-(b-2a)}{2a}=\frac{a+b+a-b-b+2a}{2a}$$
$$=\frac{4a-b}{2a}$$

Por lo tanto, $\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{2a}-\frac{b-2a}{2a}=\frac{4a-b}{2a}$.

2. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\frac{8}{a^2+2a}+\frac{4}{a+2}$. Considere $a \neq 0,\ a \neq -2$.

Solución
Se tiene una suma de expresiones algebraicas heterogéneas ya que sus denominadores son diferentes.

$$\frac{8}{a^2+2a}+\frac{4}{a+2}$$

Se factoriza el denominador de la primera expresión usando el método de factor común. El denominador de la segunda no es factorizable.

$$\frac{8}{a(a+2)}+\frac{4}{a+2}$$

El común denominador sería $a(a+2)$ y se procede a convertir en expresiones algebraicas homogéneas.

La primera expresión no sufre ninguna transformación porque su denominador corresponde precisamente al común denominador.

$$\frac{8}{a(a+2)}$$

La segunda sí debe convertirse en homogénea a la primera.

$$\frac{4}{a+2}=\frac{?}{a(a+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a+2}\cdot\frac{a}{a}=\frac{4a}{a(a+2)}$$

Ahora se realiza la operación.

$$\frac{8}{a(a+2)}+\frac{4a}{a(a+2)}=\frac{8+4a}{a(a+2)}$$

Se factoriza el numerador por el método de factor común y se simplifica la expresión resultante.

$$\begin{aligned}\frac{8+4a}{a(a+2)}&=\frac{4(2+a)}{a(a+2)}\\&=\frac{4(2+a)}{a(a+2)}\\&=\frac{4}{a}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{8}{a^2+2a}+\frac{4}{a+2}=\frac{4}{a}$.

3. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\frac{y-1}{y^2-1}-\frac{1}{y+1}$.

Considere $y \neq -1,\ y \neq 1$.

Solución

Se tiene una resta de expresiones algebraicas heterogéneas ya que sus denominadores son diferentes.

$$\frac{y-1}{y^2-1}-\frac{1}{y+1}$$

Se factoriza el denominador de la primer expresión algebraica usando el método de diferencia de cuadrados. El denominador de la segunda no es factorizable.

$$\frac{y-1}{(y+1)(y-1)}-\frac{1}{y+1}$$

El común denominador sería $(y+1)(y-1)$ y se procede a convertir en expresiones algebraicas homogéneas.

La primera expresión no sufre ninguna transformación porque su denominador corresponde precisamente al común denominador.

$$\frac{y-1}{(y+1)(y-1)}$$

La segunda sí debe convertirse en homogénea a la primera.

$$\frac{1}{y+1}=\frac{?}{(y+1)(y-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y+1}\cdot\frac{y-1}{y-1}=\frac{y-1}{(y+1)(y-1)}$$

Ahora se realiza la operación.

$$\begin{aligned}\frac{y-1}{(y+1)(y-1)}-\frac{y-1}{(y+1)(y-1)}&=\frac{(y-1)-(y-1)}{(y+1)(y-1)}\\&=\frac{y-1-y+1}{(y+1)(y-1)}\\&=0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{y-1}{y^2-1}-\frac{1}{y+1}=0$.

4. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\frac{1}{a^2-2ax+x^2}+\frac{1}{a^2+2ax+x^2}-\frac{1}{a^2-x^2}$. Considere $a\neq x$, $a\neq -x$.

Solución

Se tiene una suma y una resta de expresiones algebraicas heterogéneas ya que sus denominadores son diferentes.

$$\frac{1}{a^2-2ax+x^2}+\frac{1}{a^2+2ax+x^2}-\frac{1}{a^2-x^2}$$

Se factoriza el denominador de la primera expresión algebraica usando la segunda fórmula notable.

$$\frac{1}{(a-x)^2}$$

Se factoriza el denominador de a segunda usando la primera fórmula notable.

$$\frac{1}{(a+x)^2}$$

Se factoriza el denominador de la tercera usando el método de diferencia de cuadrados.

$$\frac{1}{(a+x)(a-x)}$$

Esto permite reescribir la operación con los denominadores factorizados.

$$\frac{1}{(a-x)^2}+\frac{1}{(a+x)^2}-\frac{1}{(a+x)(a-x)}$$

El común denominador sería $(a-x)^2(a+x)^2$ y se procede a convertir en homogéneas las expresiones algebraicas.

Para la primera se tiene:

$$\frac{1}{(a-x)^2}=\frac{?}{(a-x)^2(a+x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a-x)^2}\cdot\frac{(a+x)^2}{(a+x)^2}=\frac{(a+x)^2}{(a-x)^2(a+x)^2}$$

Para la segunda se tiene:

$$\frac{1}{(a+x)^2}=\frac{?}{(a-x)^2(a+x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+x)^2}\cdot\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2}=\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2(a+x)^2}$$

Para la tercera se tiene:

$$\frac{1}{(a+x)(a-x)}=\frac{?}{(a-x)^2(a+x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+x)(a-x)}\cdot\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x)(a-x)}=\frac{(a+x)(a-x)}{(a-x)^2(a+x)^2}$$

Ahora se realiza la operación.

$$\frac{(a+x)^2}{(a-x)^2(a+x)^2}+\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2(a+x)^2}-\frac{(a+x)(a-x)}{(a-x)^2(a+x)^2}$$

$$=\frac{(a+x)^2+(a-x)^2-(a^2-x^2)}{(a-x)^2(a+x)^2}$$

$$=\frac{a^2+2ax+x^2+a^2-2ax+x^2-a^2+x^2}{(a-x)^2(a+x)^2}$$

$$=\frac{a^2+3x^2}{(a-x)^2(a+x)^2}$$

Por lo tanto, $\dfrac{1}{a^2-2ax+x^2}+\dfrac{1}{a^2+2ax+x^2}-\dfrac{1}{a^2-x^2}=\dfrac{a^2+3x^2}{(a-x)^2(a+x)^2}$.

Ejercicios

1. Encuentre el resultado simplificado de cada una de las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{2k}{3m^2}+\dfrac{5k}{6m}-\dfrac{7k}{2m}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-25}-\dfrac{1}{x-5}$

c) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$

d) $\dfrac{a}{b-1}-\dfrac{a}{1-b}$

e) $\dfrac{x+y}{2x-2y}-\dfrac{x^2+y^2}{2x^2-2y^2}$

f) $\dfrac{k^2+k-1}{2k^2}-\dfrac{2k+1}{4k}$

g) $\dfrac{m+1}{m-1}-1+\dfrac{1}{m-1}$

h) $\dfrac{n-1}{n^2+n}+\dfrac{n+1}{n^2+n}-\dfrac{n}{n^2+n}$

Soluciones

2. A continuación se muestra una manera de realizar estas operaciones.

a) Se tiene una suma y una resta de expresiones algebraicas heterogéneas ya que sus denominadores son diferentes.

$$\frac{2k}{3m^2}+\frac{5k}{6m}-\frac{7k}{2m}$$

El común denominador sería $6m^2$ y se procede a convertir en fracciones homogéneas.

Para la primera expresión algebraica se tiene:

$$\frac{2k}{3m^2}=\frac{?}{6m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2k}{3m^2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{4k}{6m^2}$$

Para la segunda se tiene:

$$\frac{5k}{6m}=\frac{?}{6m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{5k}{6m}\cdot\frac{m}{m}=\frac{5km}{6m^2}$$

Para la tercera se tiene:

$$\frac{7k}{2m}=\frac{?}{6m^2}$$

$$\Rightarrow \frac{7k}{2m}\cdot\frac{3m}{3m}=\frac{21km}{6m^2}$$

Ahora se realiza la operación.

$$\frac{4k}{6m^2}+\frac{5km}{6m^2}-\frac{21km}{6m^2}=\frac{4k+5km-21km}{6m^2}$$

$$=\frac{4k-16km}{6m^2}$$

El numerador se puede factorizar por el método de factor común para simplificar la expresión algebraica resultante.

$$\frac{4(k-4km)}{6m^2}=\frac{2\cdot 2(k-4km)}{2\cdot 3m^2}$$

$$=\frac{2(k-4km)}{3m^2}$$

Por lo tanto, $\dfrac{2k}{3m^2}+\dfrac{5k}{6m}-\dfrac{7k}{2m}=\dfrac{2k-8km}{3m^2}$.

b) Se tiene una resta de expresiones algebraicas heterogéneas ya que sus denominadores son diferentes.

$$\frac{x-1}{x^2-25}-\frac{1}{x-5}$$

Se factoriza el denominador de la primera expresión usando el método de diferencia de cuadrados.

$$\frac{x-1}{(x-5)(x+5)}$$

Esto permite reescribir la operación con el denominador de la primera expresión algebraica factorizado.

$$\frac{x-1}{(x-5)(x+5)}-\frac{1}{x-5}$$

El común denominador sería $(x-5)(x+5)$ y se procede a convertir en expresiones algebraicas homogéneas.

Para la primera expresión no es necesario realizar ningún procedimiento porque su denominador corresponde precisamente al común denominador.

$$\frac{x-1}{(x-5)(x+5)}$$

Para la segunda se tiene:

$$\frac{1}{x-5}=\frac{?}{(x-5)(x+5)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-5}\cdot\frac{(x+5)}{(x+5)}=\frac{(x+5)}{(x-5)(x+5)}$$

Ahora se realiza la operación.

$$\frac{x-1}{(x-5)(x+5)}-\frac{(x+5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{x-1-(x+5)}{(x-5)(x+5)}$$
$$=\frac{x-1-x-5}{(x-5)(x+5)}$$
$$=\frac{-6}{(x-5)(x+5)}$$

Por lo tanto, $\dfrac{x-1}{x^2-25}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{-6}{x^2-25}$.

c) Se tiene una suma de expresiones algebraicas heterogéneas ya que sus denominadores son diferentes.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$$

El común denominador sería $(x-1)(x+1)$ y se procede a convertir en expresiones algebraicas homogéneas.

Para la primera expresión algebraica se tiene:

$$\frac{1}{(x-1)}=\frac{?}{(x-1)(x+1)}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{(x-1)}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)}=\frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

Para la segunda se tiene:

$$\frac{1}{(x+1)}=\frac{?}{(x-1)(x+1)}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)}\cdot\frac{(x-1)}{(x-1)}=\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Ahora se realiza la operación.

$$\frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

Por lo tanto, $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$.

d) Se tiene una resta de expresiones algebraicas heterogéneas ya que sus denominadores son diferentes.

$$\frac{a}{b-1}-\frac{a}{1-b}$$

Es posible factorizar el denominador de la segunda expresión por el método de factor común.

$$\frac{a}{-(b-1)}$$

Esto permite reescribir la operación.

$$\frac{a}{b-1}-\frac{a}{-(b-1)}=\frac{a}{b-1}+\frac{a}{b-1}$$

Ahora se trata de expresiones algebraicas homogéneas cuyo denominador es $b-1$ así que se resuelve la operación.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b-1}+\frac{a}{b-1}&=\frac{a+a}{b-1}\\&=\frac{2a}{b-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{a}{b-1}-\dfrac{a}{1-b}=\dfrac{2a}{b-1}$.

e) Se tiene una resta de expresiones algebraicas heterogéneas ya que sus denominadores son diferentes.

$$\frac{x+y}{2x-2y}-\frac{x^2+y^2}{2x^2-2y^2}$$

Se factoriza el denominador de la primera expresión usando el método de factor común.

$$\frac{x+y}{2(x-y)}$$

Se factoriza el denominador de a segunda usando primero el método de factor común y luego diferencia de cuadrados.

$$\frac{x^2+y^2}{2\left(x^2-y^2\right)}=\frac{x^2+y^2}{2(x-y)(x+y)}$$

Esto permite reescribir la operación con los denominadores factorizados.

$$\frac{x+y}{2(x-y)}-\frac{x^2+y^2}{2(x-y)(x+y)}$$

El común denominador sería $2(x-y)(x+y)$ y se procede a convertir en expresiones algebraicas homogéneas.

Para la primera expresión se tiene:

$$\frac{x+y}{2(x-y)}=\frac{?}{2(x-y)(x+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{2(x-y)}\cdot\frac{(x+y)}{(x+y)}=\frac{(x+y)^2}{2(x-y)(x+y)}$$

Para la segunda no es necesario realizar ningún procedimiento porque su denominador corresponde precisamente al común denominador.

$$\frac{x^2+y^2}{2(x-y)(x+y)}$$

Ahora se resuelve la operación.

$$\begin{aligned}\frac{(x+y)^2}{2(x-y)(x+y)}-\frac{x^2+y^2}{2(x-y)(x+y)}&=\frac{(x+y)^2-\left(x^2+y^2\right)}{2(x-y)(x+y)}\\&=\frac{x^2+2xy+y^2-x^2-y^2}{2(x-y)(x+y)}\\&=\frac{2xy}{2(x-y)(x+y)}\\&=\frac{xy}{(x-y)(x+y)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{x+y}{2x-2y}-\dfrac{x^2+y^2}{2x^2-2y^2}=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$.

f) Se tiene una suma de expresiones algebraicas heterogéneas ya que sus denominadores son diferentes.

$$\frac{k^2+k-1}{2k^2}-\frac{2k+1}{4k}$$

El común denominador sería $4k^2$ y se procede a convertir en expresiones algebraicas homogéneas.

Para la primera expresión se tiene:

$$\frac{k^2+k-1}{2k^2}=\frac{?}{4k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k^2+k-1}{2k^2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2k^2+2k-2}{4k^2}$$

Para la segunda se tiene:

$$\frac{2k+1}{4k}=\frac{?}{4k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2k+1}{4k}\cdot\frac{k}{k}=\frac{2k^2+k}{4k^2}$$

Ahora se realiza la operación.

$$\begin{aligned}\frac{2k^2+2k-2}{4k^2}-\frac{2k^2+k}{4k^2}&=\frac{2k^2+2k-2-\left(2k^2+k\right)}{4k^2}\\&=\frac{2k^2+2k-2-2k^2-k}{4k^2}\\&=\frac{k-2}{4k^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{k^2+k-1}{2k^2}-\dfrac{2k+1}{4k}=\dfrac{k-2}{4k^2}$.

g) Se tiene una resta y una suma de expresiones algebraicas en las cuales la primera y la tercera son homogéneas pero la segunda tiene un denominador diferente.

$$\frac{m+1}{m-1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{m-1}$$

El común denominador sería $m-1$ y solo es necesario convertir en homogénea la segunda fracción.

$$\frac{1}{1}=\frac{?}{m-1}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1}\cdot\frac{m-1}{m-1}=\frac{m-1}{m-1}$$

Ahora se realiza la operación.

$$\begin{aligned}\frac{m+1}{m-1}-\frac{m-1}{m-1}+\frac{1}{m-1}&=\frac{m+1-(m-1)+1}{m-1}\\&=\frac{m+1-m+1+1}{m-1}\\&=\frac{3}{m-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{m+1}{m-1}-1+\frac{1}{m-1}=\frac{3}{m-1}$.

h) Se tiene una suma y una resta de expresiones algebraicas homogéneas ya que sus denominadores son iguales.

$$\frac{n-1}{n^2+n}+\frac{n+1}{n^2+n}-\frac{n}{n^2+n}$$

Se conserva el denominador y se realizan la suma y la resta de los numeradores.

$$\frac{n-1+n+1-n}{n^2+n}=\frac{n}{n^2+n}$$

Se factoriza el denominador con el método de expresión común para simplificar la fracción.

$$\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto, $\frac{n-1}{n^2+n}+\frac{n+1}{n^2+n}-\frac{n}{n^2+n}=\frac{1}{n+1}$.