OPERACIONES COMBINADAS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejemplos

1. Encuentre el resultado simplificado de la operación

$$\frac{a}{a+2}+\frac{a^2-1}{a+2}\cdot\frac{2a+4}{a^2+3a+2}$$. Considere $a\neq -2,\ a\neq -1$.

Solución

Como el producto tiene prioridad sobre las otras operaciones aritméticas se inicia por la multiplicación.

$$\frac{a^2-1}{a+2}\cdot\frac{2a+4}{a^2+3a+2}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{(a^2-1)(2a+4)}{(a+2)(a^2+3a+2)}$$

Se factoriza el numerador usando en el primer factor el método de diferencia de cuadrados y en el otro el método de factor común. Para el denominador solo se factoriza el segundo factor por el método de inspección.

$$\frac{(a-1)(a+1)2(a+2)}{(a+2)(a+2)(a+1)}$$

Ahora se simplifica.

$$\begin{aligned}\frac{(a-1)(a+1)2(a+2)}{(a+2)(a+2)(a+1)}&=\frac{(a-1)(a+1)2(a+2)}{(a+2)(a+2)(a+1)}\\&=\frac{2(a-1)}{(a+2)}\\&=\frac{2a-2}{a+2}\end{aligned}$$

Seguidamente se procede a realizar la suma.

$$\frac{a}{a+2}+\frac{2a-2}{a+2}$$

Se trata de una suma de expresiones algebraicas homogéneas pues tienen el mismo denominador, por ello se conserva el denominador y se suman los numeradores.

$$\frac{a+2a-2}{a+2}=\frac{3a-2}{a+2}$$

Por lo tanto, $\frac{a}{a+2}+\frac{a^2-1}{a+2}\cdot\frac{2a+4}{a^2+3a+2}=\frac{3a-2}{a+2}$.

2. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\left(\frac{b-1}{b^2-1}\cdot\frac{b+1}{b}\right)\div\left(\frac{b-3}{b^2-9}\cdot\frac{b+3}{b+1}\right)$. Considere $b\neq 0, b\neq 3, b\neq -3, b\neq 1,$ $b\neq -1$.

Solución

Los signos de agrupación tienen prioridad, de modo que se inicia resolviendo la operación dentro del primer paréntesis.

$$\frac{b-1}{b^2-1}\cdot\frac{b+1}{b}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{(b-1)(b+1)}{(b^2-1)b}$$

El primer factor del denominador se puede factorizar usando el método de diferencia de cuadrados y luego se simplifica.

$$\begin{aligned}\frac{(b-1)(b+1)}{(b-1)(b+1)b}&=\frac{(b-1)(b+1)}{(b-1)(b+1)b}\\&=\frac{1}{b}\end{aligned}$$

Ahora se realiza la operación dentro del segundo paréntesis.

$$\frac{b-3}{b^2-9}\cdot\frac{b+3}{b+1}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{(b-3)(b+3)}{(b^2-9)(b+1)}$$

El primer factor del denominador se puede factorizar usando el método de diferencia de cuadrados y luego se simplifica.

$$\begin{aligned}\frac{(b-3)(b+3)}{(b-3)(b+3)(b+1)}&=\frac{(b-3)(b+3)}{(b-3)(b+3)(b+1)}\\&=\frac{1}{b+1}\end{aligned}$$

Finalmente se realiza la división, la cual se reescribe como la multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

$$\frac{1}{b} \div \frac{1}{b+1} = \frac{1}{b} \cdot \frac{b+1}{1}$$
$$= \frac{b+1}{b}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{b-1}{b^2-1} \cdot \frac{b+1}{b}\right) \div \left(\frac{b-3}{b^2-9} \cdot \frac{b+3}{b+1}\right) = \frac{b+1}{b}$.

3. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\dfrac{4-\frac{3}{k}}{2+\frac{5}{k}} + \dfrac{2k-\frac{1}{3}}{2k+5} - \dfrac{2}{6k+15}$. Considere $k \neq 0$, $b \neq \frac{-5}{2}$, $b \neq \frac{5}{2}$.

Solución

Se inicia simplificando la primera expresión algebraica compleja la cual se reescribe como una división.

$$\left(4 - \frac{3}{k}\right) \div \left(2 + \frac{5}{k}\right)$$

Los signos de agrupación tienen prioridad por lo cual se resuelve la resta del primer paréntesis.

$$\frac{4}{1} - \frac{3}{k}$$

Es una resta de fracciones heterogéneas porque tienen diferente denominador. El común denominador es k, por eso solo hay que convertir la primera fracción.

$$\frac{4}{1} = \frac{?}{k}$$
$$\Rightarrow \frac{4}{1} \cdot \frac{k}{k} = \frac{4k}{k}$$

Ahora se realiza la operación.

$$\frac{4k}{k} - \frac{3}{k} = \frac{4k-3}{k}$$

Se continúa con la suma del segundo paréntesis.

$$\frac{2}{1} + \frac{5}{k}$$

Es una resta de fracciones heterogéneas porque tienen diferente denominador. El común denominador es k, por eso solo hay que convertir la primera expresión.

$$\frac{2}{1}=\frac{?}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1}\cdot\frac{k}{k}=\frac{2k}{k}$$

Ahora se resuelve la operación.

$$\frac{2k}{k}+\frac{5}{k}=\frac{2k+5}{k}$$

Como siguiente paso se resuelve la división, reescribiéndola como el producto del dividendo por el recíproco del divisor.

$$\begin{aligned}\frac{4k-3}{k}\div\frac{2k+5}{k}&=\frac{4k-3}{k}\cdot\frac{k}{2k+5}\\&=\frac{(4k-3)k}{k(2k+5)}\\&=\frac{4k-3}{2k+5}\end{aligned}$$

Ahora se procede a simplificar la segunda expresión compleja la cual se reescribe como una división.

$$\left(2k-\frac{1}{3}\right)\div(2k+5)$$

Los signos de agrupación tienen prioridad por lo cual se realiza la resta del primer paréntesis.

$$\frac{2k}{1}-\frac{1}{3}$$

Es una resta de fracciones heterogéneas porque tienen diferente denominador. El común denominador es 3, por eso solo hay que convertir la primera expresión.

$$\frac{2k}{1}=\frac{?}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2k}{1}\cdot\frac{3}{3}=\frac{6k}{3}$$

Ahora se resuelve la operación.

$$\frac{6k}{3}-\frac{1}{3}=\frac{6k-1}{3}$$

Se resuelve la división reescribiéndola como el producto del dividendo por el recíproco del divisor.

$$\frac{6k-1}{3} \div (2k+5) = \frac{6k-1}{3} \cdot \frac{1}{2k+5}$$
$$= \frac{6k-1}{3(2k+5)}$$

Finalmente se deben efectuar la suma y la resta con los resultados obtenidos de la simplificación de las dos expresiones algebraicas complejas.

$$\frac{4k-3}{2k+5} + \frac{6k-1}{3(2k+5)} - \frac{2}{6k+15}$$

Se factoriza el denominador de la última expresión usando el método de factor común.

$$\frac{4k-3}{2k+5} + \frac{6k-1}{3(2k+5)} - \frac{2}{3(2k+5)}$$

El común denominador es $3(2k+5)$ y solo es necesario convertir la primera expresión algebraica.

$$\frac{4k-3}{2k+5} = \frac{?}{3(2k+5)}$$
$$\Rightarrow \frac{4k-3}{2k+5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{12k-9}{3(2k+5)}$$

Ahora se resuelve la operación.

$$\frac{12k-9}{3(2k+5)} + \frac{6k-1}{3(2k+5)} - \frac{2}{3(2k+5)} = \frac{12k-9+6k-1-2}{3(2k+5)}$$
$$= \frac{18k-12}{3(2k+5)}$$

Se factoriza el numerador por el método de factor común y se simplifica.

$$\frac{18k-12}{3(2k+5)} = \frac{6(3k-4)}{3(2k+5)}$$
$$= \frac{2 \cdot 3(3k-4)}{3(2k+5)}$$
$$= \frac{2(3k-4)}{(2k+5)}$$
$$= \frac{6k-8}{2k+5}$$

Por lo tanto, $\dfrac{4-\dfrac{3}{k}}{2+\dfrac{5}{k}}+\dfrac{2k-\dfrac{1}{3}}{2k+5}-\dfrac{2}{6k+15}=\dfrac{6k-4}{2k+5}$.

4. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\dfrac{m^2+2m+1}{m^2-2m-3}\div\dfrac{m^2-1}{m+1}-\dfrac{1}{a-1}$. Considere $a\neq 1$, $m\neq -1$, $m\neq 1$, $m\neq 3$.

Solución

Se realiza primero la división reescribiéndola como la multiplicación del dividendo por el recíproco del divisor.

$$\frac{m^2+2m+1}{m^2-2m-3}\cdot\frac{m+1}{m^2-1}$$

Se multiplican lo numeradores y los denominadores.

$$\frac{\left(m^2+2m+1\right)(m+1)}{\left(m^2-2m-3\right)\left(m^2-1\right)}$$

Se factoriza el primer factor del numerador por medio de la primera fórmula notable. En el denominador se aplica el método de inspección al primer factor y al segundo diferencia de cuadrados.

$$\frac{(m+1)^2(m+1)}{(m-3)(m+1)(m-1)(m+1)}$$

Ahora se simplifica.

$$\frac{(m+1)^2(m+1)}{(m-3)(m+1)(m-1)(m+1)}=\frac{m+1}{(m-3)(m-1)}$$

A continuación se efectúa la resta.

$$\frac{(m+1)}{(m-3)(m-1)}-\frac{1}{m-1}$$

Son expresiones algebraicas heterogéneas porque tienen diferente denominador. El común denominador es $(m-3)(m-1)$ y solo se debe reescribir la segunda expresión.

$$\frac{1}{m-1}=\frac{?}{(m-3)(m-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m-1}\cdot\frac{m-3}{m-3}=\frac{m-3}{(m-3)(m-1)}$$

Se tiene una resta de expresiones algebraicas homogéneas.

$$\begin{aligned}\frac{(m+1)}{(m-3)(m-1)}-\frac{(m-3)}{(m-3)(m-1)}&=\frac{(m+1)-(m-3)}{(m-3)(m-1)}\\&=\frac{m+1-m+3}{(m-3)(m-1)}\\&=\frac{4}{(m-3)(m-1)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{m^2+2m+1}{m^2-2m-3}\div\dfrac{m^2-1}{m+1}-\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{4}{m^2-4m+3}$.

Ejercicios

1. Encuentre el resultado simplificado de cada una de las siguientes operaciones. Considere que cada operación se realiza en la intersección de los dominios máximos de las expresiones que la conforman.

a) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$

b) $\frac{k^2+4k+3}{k^2+4k+4}\div\left(\frac{k-2}{k^2-4}+\frac{k}{k+2}\right)$

c) $\frac{k-\frac{m^2}{k}}{\frac{k-m}{k}}$

d) $\frac{x^2-4}{x^2+2x}\div\frac{x^2+x-2}{x^2-x}\cdot\frac{x^2+2x}{x^2+x}$

e) $\frac{b+6}{b+2}+\frac{b^2-4b+3}{b^2-b}\cdot\frac{b^3-9b}{b^3+6b^2+9b}\div\frac{b^2-9}{b^2+6b+9}$

f) $\left(m-2-\frac{10}{3m+1}\right)\div\left(m+3+\frac{5}{3m+1}\right)$

g) $\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}\right)\div\frac{x^2-3x-2}{x^2-1}$

h) $\frac{y+3}{y^2-36}\cdot\left(\frac{3y}{y^2-9}-\frac{2}{y+3}\right)$

Soluciones

2. A continuación se presenta una manera de realizar las operaciones planteadas.

a) Se resuelven primero las restas de los paréntesis y por último la división.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right) &= \frac{x^2-y^2}{yx}\div\frac{x-y}{yx}\\
&= \frac{x^2-y^2}{yx}\cdot\frac{yx}{x-y}\\
&= \frac{\left(x^2-y^2\right)yx}{yx\left(x-y\right)}\\
&= \frac{\cancel{(x-y)}\,(x+y)\,\cancel{yx}}{\cancel{yx}\,\cancel{(x-y)}}\\
&= x+y
\end{aligned}
$$

b) Se resuelve primero la suma que está dentro del paréntesis.

$$
\begin{aligned}
\frac{k-2}{k^2-4}+\frac{k}{k+2} &= \frac{k-2}{(k-2)(k+2)}+\frac{k}{k+2}\\
&= \frac{k-2+k(k-2)}{(k-2)(k+2)}\\
&= \frac{k-2+k^2-2k}{(k-2)(k+2)}\\
&= \frac{k^2-k-2}{(k-2)(k+2)}\\
&= \frac{(k-2)(k+1)}{(k-2)(k+2)}\\
&= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}
$$

Ahora se efectúa la división.

$$\frac{k^2+4k+3}{k^2+4k+4} \div \frac{k+1}{k+2} = \frac{k^2+4k+3}{k^2+4k+4} \cdot \frac{k+2}{k+1}$$
$$= \frac{(k+3)(k+1)(k+2)}{(k+2)^2(k+1)}$$
$$= \frac{(k+3)(k+1)(k+2)}{(k+2)^2(k+1)}$$
$$= \frac{k+3}{k+2}$$

c) Se expresa la operación como una división y se resuelve primero la resta dentro del paréntesis.

$$\left(k-\frac{m^2}{k}\right) \div \frac{k-m}{k} = \frac{k^2-m^2}{k} \div \frac{k-m}{k}$$
$$= \frac{k^2-m^2}{k} \cdot \frac{k}{k-m}$$
$$= \frac{(k-m)(k+m)k}{k(k-m)}$$
$$= \frac{(k-m)(k+m)k}{k(k-m)}$$
$$= k+m$$

d) Se reescribe la división como el producto del dividendo por el recíproco del divisor y luego se hacen los productos.

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x} \cdot \frac{x^2-x}{x^2+x-2} \cdot \frac{x^2+2x}{x^2+x} = \frac{(x-2)(x+2)x(x-1)x(x+2)}{x(x+2)(x+2)(x-1)x(x+1)}$$
$$= \frac{(x-2)(x+2)x(x-1)x(x+2)}{x(x+2)(x+2)(x-1)x(x+1)}$$
$$= \frac{x-2}{x+1}$$

e) Se resuelven primero la multiplicación y la división. Esta última se reescribe como el producto por el recíproco del divisor.

$$\frac{b^2-4b+3}{b^2-b}\cdot\frac{b^3-9b}{b^2+6b+9}\cdot\frac{b^2+6b+9}{b^2-9}$$

$$=\frac{(b-3)(b-1)b(b-3)(b+3)(b+3)^2}{b(b-1)(b+3)^2(b-3)(b+3)}$$

$$=\frac{(b-3)(b-1)b(b-3)(b+3)(b+3)^2}{b(b-1)(b+3)^2(b-3)(b+3)}$$

$$=b-3$$

Ahora se resuelve la suma.

$$\frac{b+6}{b+2}+b-3=\frac{b+6+(b+2)(b-3)}{b+2}$$

$$=\frac{b+6+b^2-b-6}{b+2}$$

$$=\frac{b^2}{b+2}$$

f) Como los signos de agrupación tienen prioridad se resuelven primero la resta y la suma dentro de los paréntesis.

$$\left(\frac{m-2}{1}-\frac{10}{3m+1}\right)\div\left(\frac{m+3}{1}+\frac{5}{3m+1}\right)$$

$$=\frac{(m-2)(3m+1)-10}{3m+1}\div\frac{(m+3)(3m+1)+5}{3m+1}$$

$$=\frac{3m^2-5m-2-10}{3m+1}\div\frac{3m^2+10m+3+5}{3m+1}$$

$$=\frac{3m^2-5m-12}{3m+1}\div\frac{3m^2+10m+8}{3m+1}$$

Finalmente se efectúa la división reescribiéndola como el producto por el recíproco del divisor.

$$\frac{3m^2-5m-12}{3m+1}\cdot\frac{3m+1}{3m^2+10m+8}=\frac{(3m+4)(m-3)(3m+1)}{(3m+1)(3m+4)(m+2)}$$

$$=\frac{(3m+4)(m-3)(3m+1)}{(3m+1)(3m+4)(m+2)}$$

$$=\frac{m-3}{m+2}$$

g) Se resuelve primero la resta que está dentro del paréntesis.

$$\frac{x(x-1)-2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \div \frac{x^2-3x-2}{x^2-1} = \frac{x^2-x-2x-2}{(x+1)(x-1)} \div \frac{x^2-3x-2}{x^2-1}$$

$$= \frac{x^2-3x-2}{(x+1)(x-1)} \div \frac{x^2-3x-2}{x^2-1}$$

Ahora se reescribe la división como el producto por el recíproco del divisor.

$$\frac{x^2-3x-2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-3x-2} = \frac{(x^2-3x-2)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2-3x-2)}$$

$$= \frac{\left(x^2-3x-2\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2-3x-2\right)}$$

$$= 1$$

h) En primer lugar se efectúa la resta que se encuentra dentro del paréntesis.

$$\frac{3y}{y^2-9} - \frac{2}{y+3} = \frac{3y}{(y-3)(y+3)} - \frac{2}{y+3}$$

$$= \frac{3y-2(y-3)}{(y-3)(y+3)}$$

$$= \frac{3y-2y+6}{(y-3)(y+3)}$$

$$= \frac{y+6}{(y-3)(y+3)}$$

Finalmente se efectúa el producto.

$$\frac{y+3}{y^2-36} \cdot \frac{y+6}{(y-3)(y+3)} = \frac{(y+3)(y+6)}{(y-6)(y+6)(y-3)(y+3)}$$

$$= \frac{\cancel{(y+3)}\,\cancel{(y+6)}}{(y-6)\cancel{(y+6)}(y-3)\cancel{(y+3)}}$$

$$= \frac{1}{y^2-9y+18}$$