EJERCICIOS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejemplos

1. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\dfrac{2x^2-3x-2}{x+1} \div \dfrac{2x^2+x}{x^2-1}$.

Considere $x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq \dfrac{-1}{2},\ x \neq -1$.

Solución
Se reescribe la división como el producto del dividendo por el recíproco del divisor. Se multiplican los numeradores y los denominadores y por último se simplifica.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2-3x-2}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2+x} &= \frac{(2x^2-3x-2)(x^2-1)}{(x+1)(2x^2+x)} \\
&= \frac{(2x+1)(x-2)(x-1)(x+1)}{(x+1)x(2x+1)} \\
&= \frac{(2x+1)(x-2)(x-1)(x+1)}{(x+1)x(2x+1)} \\
&= \frac{(x-2)(x-1)}{x} \\
&= \frac{x^2-3x+2}{x}
\end{aligned}$$

2. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\dfrac{x^3-8}{x^2-2x} \cdot \dfrac{x^2+3x}{x^2+2x+4}$.

Considere $x \neq 0,\ x \neq 2,\ x \neq \dfrac{1}{2}$.

Solución
Se multiplican los numeradores y los denominadores y luego se simplifica.

$$\begin{aligned}
\frac{(x^3-8)(x^2+3x)}{(x^2-2x)(x^2+2x+4)} &= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)x(x+3)}{x(x-2)(x^2+2x+4)} \\
&= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)x(x+3)}{x(x-2)(x^2+2x+4)} \\
&= x+3
\end{aligned}$$

3. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\left(\dfrac{1}{x-2}-1\right)\left(-1+\dfrac{1}{3-x}\right)$.

Considere $x \neq 3, x \neq 2$.

Solución
Se resuelven primero la resta y la suma que se encuentran dentro de los paréntesis y por último se efectúa la multiplicación.

$$\begin{aligned}\frac{1-1(x-2)}{x-2}\cdot\frac{-1(3-x)+1}{3-x} &= \frac{1-x+2}{x-2}\cdot\frac{-3+x+1}{3-x}\\ &= \frac{3-x}{x-2}\cdot\frac{x-2}{3-x}\\ &= \frac{(3-x)(x-2)}{(x-2)(3-x)}\\ &= \frac{(3-x)(x-2)}{(x-2)(3-x)}\\ &= 1\end{aligned}$$

4. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\dfrac{a-\dfrac{a}{a-1}}{1-\dfrac{a}{a-1}}$. Considere que la expresión se encuentra definida en su dominio máximo.

Solución
Se expresa la fracción como una división y se resuelven primero las restas que están dentro de los paréntesis.

$$\begin{aligned}\left(a-\frac{a}{a-1}\right)\div\left(1-\frac{a}{a-1}\right) &= \frac{a(a-1)-a}{a-1}\div\frac{1(a-1)-a}{a-1}\\ &= \frac{a^2-a-a}{a-1}\div\frac{a-1-a}{a-1}\\ &= \frac{a^2-2a}{a-1}\div\frac{-1}{a-1}\end{aligned}$$

Se reescribe la división como el producto del dividendo por el recíproco del divisor, se multiplican lo numeradores y los denominadores y, finalmente, se simplifica.

$$\frac{a^2-2a}{a-1}\cdot\frac{a-1}{-1}=\frac{\left(a^2-2a\right)\left(a-1\right)}{-1\left(a-1\right)}$$

$$=\frac{\left(a^2-2a\right)\left(a-1\right)}{-1\left(a-1\right)}$$

$$=\frac{a^2-2a}{-1}$$

$$=2a-a^2$$

Ejercicios

1. Encuentre el resultado simplificado de cada una de las siguientes operaciones.

a) $\dfrac{3x+6}{x^2+2x}-\dfrac{2}{x}$

b) $\left(k-\dfrac{1}{k}\right)\div\left(\dfrac{1}{k}-1\right)$

c) $\dfrac{x^2-3x}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x-3}\div\dfrac{x+2}{x}$

d) $\left(b-\dfrac{a}{a}\right)\div\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{1}{a}\right)$

e) $\dfrac{x+\frac{3}{x}}{3+\frac{1}{x}}-\dfrac{x^2+2}{3x+1}$

f) $\dfrac{4b+3}{b^2+b}-\dfrac{2}{b}+\dfrac{b-1}{b^2+b}$

g) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{b^2+b}\right)\cdot\dfrac{ab+a}{a^2}$

h) $\dfrac{4}{m+3}+\dfrac{m-5}{m^2-9}\cdot\dfrac{m-3}{m-5}$

Soluciones

2. A continuación se presenta una manera de realizar estos ejercicios.

a) Se trata de una resta de expresiones algebraicas heterogéneas, por ello, se busca el común denominador y se efectúa la operación.

$$\begin{aligned}
\frac{3x+6}{x^2+2x}-\frac{2}{x} &= \frac{3x+6}{x(x+2)}-\frac{2}{x}\\
&= \frac{3x+6-2(x+2)}{x(x+2)}\\
&= \frac{3x+6-2x-4}{x(x+2)}\\
&= \frac{x+2}{x(x+2)}\\
&= \frac{x+2}{x\left(x+2\right)}\\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

b) Se resuelven primero las restas que están dentro de los paréntesis y luego la división, reescribiéndola como el producto del dividendo por el recíproco del divisor.

$$\begin{aligned}
\left(k-\frac{1}{k}\right)\div\left(\frac{1}{k}-1\right) &= \frac{k^2-1}{k}\div\frac{1-k}{k}\\
&= \frac{k^2-1}{k}\cdot\frac{k}{1-k}\\
&= \frac{(k-1)(k+1)k}{k(1-k)}\\
&= \frac{-(1-k)(k+1)k}{k(1-k)}\\
&= \frac{-\left(1-k\right)(k+1)k}{k\left(1-k\right)}\\
&= -(k+1)\\
&= -k-1
\end{aligned}$$

c) Se reescribe la división como el producto del dividendo por el recíproco del divisor. Se multiplican los numeradores y los denominadores y luego se simplifica.

$$\frac{x^2-3x}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x-3}\div\frac{x+2}{x}=\frac{x^2-3x}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x-3}\cdot\frac{x}{x+2}$$

$$=\frac{\left(x^2-3x\right)\left(x^2-4\right)x}{(x-2)(x-3)(x+2)}$$

$$=\frac{x(x-3)(x-2)(x+2)x}{(x-2)(x-3)(x+2)}$$

$$=\frac{x\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x+2)}x}{\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x+2)}}$$

$$=x^2$$

d) Se efectúan primero las restas que se encuentran dentro de los paréntesis y luego se reescribe la división como el producto del dividendo por el recíproco del divisor. Se multiplican los numeradores y los denominadores y, finalmente, se simplifica.

$$\left(b-\frac{a}{a}\right)\div\left(\frac{b}{a}-\frac{1}{a}\right)=\frac{ba-a}{a}\div\frac{b-1}{a}$$

$$=\frac{ba-a}{a}\cdot\frac{a}{b-1}$$

$$=\frac{a(b-1)a}{a(b-1)}$$

$$=\frac{a(b-1)a}{a(b-1)}$$

$$=a$$

e) Primero se simplifica la expresión algebraica compleja reescribiéndola como una división y luego se efectúa la resta.

$$\frac{x+\frac{3}{x}}{3+\frac{1}{x}}-\frac{x^2+2}{3x+1}=\left(x+\frac{3}{x}\right)\div\left(3+\frac{1}{x}\right)-\frac{x^2+2}{3x+1}$$

$$=\frac{x^2+3}{x}\div\frac{3x+1}{x}-\frac{x^2+2}{3x+1}$$

$$=\frac{x^2+3}{x}\cdot\frac{x}{3x+1}-\frac{x^2+2}{3x+1}$$

$$=\frac{\left(x^2+3\right)x}{x\left(3x+1\right)}-\frac{x^2+2}{3x+1}$$

$$=\frac{\left(x^2+3\right)x}{x(3x+1)}-\frac{x^2+2}{3x+1}$$

$$=\frac{x^2+3}{3x+1}-\frac{x^2+2}{3x+1}$$

$$=\frac{x^2+3-x^2-2}{3x+1}$$

$$=\frac{1}{3x+1}$$

f) Se trata de una resta y una suma de expresiones algebraicas heterogéneas Como los signos de agrupación tienen prioridad se resuelven primero la resta y la suma dentro de los paréntesis.

$$\frac{4b+3}{b^2+b}-\frac{2}{b}+\frac{3b-3}{3b^2+3b}=\frac{4b+3}{b(b+1)}-\frac{2}{b}+\frac{\cancel{3}(b-1)}{\cancel{3}b(b+1)}$$

$$=\frac{4b+3-2(b+1)+b-1}{b(b+1)}$$

$$=\frac{4b+3-2b-2+b-1}{b(b+1)}$$

$$=\frac{3b}{b(b+1)}$$

$$=\frac{3b}{b(b+1)}$$

$$=\frac{3}{b+1}$$

g) Se resuelve primero la resta que está dentro del paréntesis y luego la multiplicación.

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{b^2+b}\right)\cdot\frac{ab+a}{a^2}=\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{b(b+1)}\right)\cdot\frac{ab+a}{a^2}$$

$$=\frac{a(b+1)-a}{b(b+1)}\cdot\frac{ab+a}{a^2}$$

$$=\frac{ab+a-a}{b(b+1)}\cdot\frac{ab+a}{a^2}$$

$$=\frac{ab}{b(b+1)}\cdot\frac{ab+a}{a^2}$$

$$=\frac{ab(ab+a)}{b(b+1)a^2}$$

$$=\frac{aba(b+1)}{b(b+1)a^2}$$

$$=\frac{a^2b\left(b+1\right)}{b\left(b+1\right)a^2}$$

$$=1$$

h) En primer lugar se efectúa la multiplicación y por último la suma de fracciones homogéneas.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{m+3}+\frac{m-5}{m^2-9}\cdot\frac{m-3}{m-5} &= \frac{4}{m+3}+\frac{(m-5)(m-3)}{(m^2-9)(m-5)}\\
&= \frac{4}{m+3}+\frac{(m-5)(m-3)}{(m-3)(m+3)(m-5)}\\
&= \frac{4}{m+3}+\frac{(m-5)(m-3)}{(m-3)(m+3)(m-5)}\\
&= \frac{4}{m+3}+\frac{1}{m+3}\\
&= \frac{4+1}{m+3}\\
&= \frac{5}{m+3}
\end{aligned}$$