DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejemplos

1. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\dfrac{k^4}{k^2-n^2} \div \dfrac{k^3}{k^2+2kn+n^2}$.

Considere $k \neq 0, k \neq n, k \neq -n$.

Solución

Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

Note que esto es válido porque los denominadores de las expresiones algebraicas no toman nunca el valor 0.

$$\frac{k^4}{k^2-n^2} \cdot \frac{k^2+2kn+n^2}{k^3}$$

Posteriormente, se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{k^4\left(k^2+2kn+n^2\right)}{\left(k^2-n^2\right)k^3}$$

Para factorizar el numerador se la primera fórmula notable. Para factorizar el denominador se usa el método de diferencia de cuadrados.

$$\frac{k^4\left(k+n\right)^2}{\left(k-n\right)\left(k+n\right)k^3}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{k^4\left(k+n\right)^2}{\left(k-n\right)\left(k+n\right)k^3} = \frac{k\left(k+n\right)}{k-n}$$

Por lo tanto, $\dfrac{k^4}{k^2-n^2} \div \dfrac{k^3}{k^2+2kn+n^2} = \dfrac{k\left(k+n\right)}{k-n}$.

2. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\dfrac{m^2-4}{m^2+m-6} \div \dfrac{m+2}{m^2+3m}$.

Considere $m \neq 2, m \neq -2, m \neq 0, m \neq -3$.

Solución
Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

Note que esto es válido porque los denominadores de las expresiones algebraicas no toman nunca el valor 0.

$$\frac{m^2-4}{m^2+m-6} \cdot \frac{m^2+3m}{m+2}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{\left(m^2-4\right)\left(m^2+3m\right)}{\left(m^2+m-6\right)\left(m+2\right)}$$

Para factorizar el numerador se usa el método de diferencia de cuadrados y el método de factor común. Para factorizar el denominador se usa el método de inspección.

$$\frac{(m-2)(m+2)m(m+3)}{(m+3)(m-2)(m+2)}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{(m-2)(m+2)m(m+3)}{(m+3)(m-2)(m+2)} = m$$

Por lo tanto, $\dfrac{m^2-4}{m^2+m-6} \div \dfrac{m+2}{m^2+3m} = m$.

3. Encuentre el resultado simplificado de la operación

$\dfrac{x}{x^2+2x+1} \div \dfrac{x^2+2x}{x^2+3x+2}$. Considere $x \neq 0, x \neq -2, x \neq -1$.

Solución
Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

Note que esto es válido porque los denominadores de las expresiones algebraicas no toman nunca el valor 0.

$$\frac{x}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{x\left(x^2+3x+2\right)}{\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+2x\right)}$$

Se factoriza el numerador usando el método de inspección. Se factoriza el denominador usando primera fórmula notable y factor común.

$$\frac{x(x+2)(x+1)}{(x+1)^2\,x(x+2)}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{x(x+2)(x+1)}{(x+1)^2\,x(x+2)}=\frac{1}{x+1}$$

Por lo tanto, $\dfrac{x}{x^2+2x+1}\div\dfrac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{x+1}$.

4. Encuentre el resultado simplificado de la operación $\dfrac{k^2-8k}{k+1}\div\dfrac{k^3-64k}{k^2+9k+8}$. Considere $k\neq 8$, $k\neq -8$, $k\neq 0$, $k\neq -1$.

Solución

Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

Note que esto es válido porque los denominadores de las expresiones algebraicas no toman nunca el valor 0.

$$\frac{k^2-8k}{k+1}\cdot\frac{k^2+9k+8}{k^3-64k}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{\left(k^2-8k\right)\left(k^2+9k+8\right)}{(k+1)\left(k^3-64k\right)}$$

Se factoriza el numerador por factor común y por inspección. El denominador se factoriza usando el método de factor común.

$$\frac{k(k-8)(k+8)(k+1)}{(k+1)k(k+8)(k-8)}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{k(k-8)(k+8)(k+1)}{(k+1)k(k+8)(k-8)}=1$$

Por lo tanto, $\frac{k^2-8k}{k+1}\div\frac{k^3-64k}{k^2+9k+8}=1$.

Ejercicios

1. Encuentre el resultado simplificado de cada una de las siguientes operaciones. Considere que todas las expresiones se consideran únicamente en sus dominios máximos.

a) $\dfrac{2x+2y}{x} \div \dfrac{2}{x^2}$

b) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x} \div \dfrac{x^3+5x^2+6x}{x+1}$

c) $\dfrac{2k}{k^2-1} \div \dfrac{k}{k+1}$

d) $\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+2} \div \dfrac{x+1}{x+2}$

e) $\dfrac{m^2-9}{m^2+4m+3} \div \dfrac{m^2-2m-3}{m^2+2m+1}$

f) $\dfrac{y+2}{y-5} \div \dfrac{y^2+4y+4}{y-5}$

g) $\dfrac{a^2-5a}{a^2+a} \div \dfrac{a^2-25}{a+5} \div \dfrac{a+3}{a+1}$

h) $\dfrac{b^2-1}{b+1} \div \dfrac{b^2-2b+1}{b^2-b}$

Soluciones

1. A continuación se muestra una manera de trabajar estos ejercicios.

a) Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

$$\frac{2x+2y}{x} \div \frac{2}{x^2} = \frac{2x+2y}{x} \cdot \frac{x^2}{2}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{(2x+2y)x^2}{2x}$$

Se factoriza el numerador usando el método de factor común.

$$\frac{2(x+y)x^2}{2x}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{2(x+y)x^2}{2x} = (x+y)x$$
$$= x^2 + yx$$

Por lo tanto, $\frac{2x+2y}{x} \div \frac{2}{x^2} = x^2 + yx$.

b) Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+x} \div \frac{x^3+5x^2+6x}{x+1} = \frac{x^2+5x+6}{x^2+x} \cdot \frac{x+1}{x^3+5x^2+6x}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{(x^2+5x+6)(x+1)}{(x^2+x)(x^3+5x^2+6x)}$$

Se factoriza el numerador usando el método de inspección. En el denominador para el primer factor se usa el método de factor común y, para el segundo, primero se usa factor común y luego el método de inspección.

$$\frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{x(x+1)x(x+3)(x+2)}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{x(x+1)x(x+3)(x+2)}=\frac{1}{x^2}$$

Por lo tanto, $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x}\div\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x+1}=\dfrac{1}{x^2}$.

c) Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

$$\frac{2k}{k^2-1}\div\frac{k}{k+1}=\frac{2k}{k^2-1}\cdot\frac{k+1}{k}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{2k(k+1)}{(k^2-1)k}$$

Se factoriza el numerador usando los métodos de diferencia de cuadrados e inspección. El denominador se factoriza por primera fórmula notable e inspección.

$$\frac{2k(k+1)}{(k+1)(k-1)k}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{2k(k+1)}{(k+1)(k-1)k}=\frac{2}{k-1}$$

Por lo tanto, $\dfrac{2k}{k^2-1}\div\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{2}{k-1}$.

d) Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

$$\frac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+2}\div\frac{x+1}{x+2}=\frac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+2}\cdot\frac{x+2}{x+1}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{(2x^2+3x+1)(x+2)}{(2x^2+5x+2)(x+1)}$$

Se factorizan el numerador y el denominador usando el método de inspección.

$$\frac{(2x+1)(x+1)(x+2)}{(2x+1)(x+2)(x+1)}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{(2x+1)(x+1)(x+2)}{(2x+1)(x+2)(x+1)}=1$$

Por lo tanto, $\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+2}\div\dfrac{x+1}{x+2}=1$.

e) Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

$$\frac{m^2-9}{m^2+4m+3}\div\frac{m^2-2m-3}{m^2+2m+1}=\frac{m^2-9}{m^2+4m+3}\cdot\frac{m^2+2m+1}{m^2-2m-3}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{(m^2-9)(m^2+2m+1)}{(m^2+4m+3)(m^2-2m-3)}$$

Se factoriza el numerador usando el método de diferencia de cuadrados y primera fórmula notable. El denominador se factoriza por el método de inspección.

$$\frac{(m-3)(m+3)(m+1)^2}{(m+3)(m+1)(m-3)(m+1)}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{(m-3)(m+3)(m+1)^2}{(m+3)(m+1)(m-3)(m+1)}=1$$

Por lo tanto, $\dfrac{m^2-9}{m^2+4m+3}\div\dfrac{m^2-2m-3}{m^2+2m+1}=1$.

f) Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

$$\frac{y+2}{y-5} \div \frac{y^2+4y+4}{y-5} = \frac{y+2}{y-5} \cdot \frac{y-5}{y^2+4y+4}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{(y+2)(y-5)}{(y-5)(y^2+4y+4)}$$

Se factoriza el denominador usando primera fórmula notable.

$$\frac{(y+2)(y-5)}{(y-5)(y+2)^2}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{(y+2)(y-5)}{(y-5)(y+2)^2} = \frac{1}{y+2}$$

Por lo tanto, $\frac{y+2}{y-5} \div \frac{y^2+4y+4}{y-5} = \frac{1}{y+2}$.

g) Se reescriben las divisiones multiplicando por el recíproco del divisor.

$$\frac{a^2-5a}{a^2+a} \div \frac{a^2-25}{a+5} \div \frac{a+3}{a+1} = \frac{a^2-5a}{a^2+a} \cdot \frac{a+5}{a^2-25} \cdot \frac{a+1}{a+3}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{(a^2-5a)(a+5)(a+1)}{(a^2+a)(a^2-25)(a+3)}$$

Se factoriza el numerador usando el método de factor común. En el primer factor del denominador se usa el método de factor común y, para el segundo, se usa diferencia de cuadrados.

$$\frac{a(a-5)(a+5)(a+1)}{a(a+1)(a-5)(a+5)(a+3)}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{a(a-5)(a+5)(a+1)}{a(a+1)(a-5)(a+5)(a+3)} = \frac{1}{a+3}$$

Por lo tanto, $\frac{a^2-5a}{a^2+a} \div \frac{a^2-25}{a+5} \div \frac{a+3}{a+1} = \frac{1}{a+3}$.

h) Se reescribe la división como una multiplicación cuyo primer factor es el dividendo y el segundo factor es el recíproco del divisor.

$$\frac{b^2-1}{b+1} \div \frac{b^2-2b+1}{b^2-b} = \frac{b^2-1}{b+1} \cdot \frac{b^2-b}{b^2-2b+1}$$

Se multiplican los numeradores y los denominadores.

$$\frac{(b^2-1)(b^2-b)}{(b+1)(b^2-2b+1)}$$

Se factoriza el numerador usando los métodos de diferencia de cuadrados y de factor común. El denominador se factoriza usando segunda fórmula notable.

$$\frac{(b-1)(b+1)b(b-1)}{(b+1)(b-1)^2}$$

Finalmente se simplifica.

$$\frac{(b-1)(b+1)b(b-1)}{(b+1)(b-1)^2} = b$$

Por lo tanto, $\frac{b^2-1}{b+1} \div \frac{b^2-2b+1}{b^2-b} = b$.