Simplificación de expresiones algebraicas

Ejemplos:

1. Simplifique la fracción $\dfrac{4x^2+18x+9}{4x^2-9}$, $\quad x \neq \pm\dfrac{3}{2}$.

Solución:

Se factoriza el numerador que corresponde a la primera fórmula notable y el denominador se factoriza por el método de diferencia de cuadrados.

$$\frac{4x^2+18x+9}{4x^2-9}$$

$$=\frac{(2x+3)^2}{(2x+3)(2x-3)}$$

Se simplifican los factores comunes del numerador y del denominador.

$$\frac{(2x+3)^2}{(2x+3)(2x-3)}$$

$$=\frac{\cancel{(2x+3)}\,(2x+3)}{\cancel{(2x+3)}\,(2x-3)}$$

$$=\frac{2x+3}{2x-3}$$

Por lo tanto

$$\frac{4x^2+18x+9}{4x^2-9}$$

$$=\frac{(2x+3)}{(2x-3)}$$

2. Simplifique la fracción $\dfrac{c^3+c^2}{c^2+c}$, $\quad c \neq 0,\ c \neq -1.$

Solución:

Se factorizan el numerador y el denominador de la fracción por el método de factor común.

$$\frac{c^3+c^2}{c^2+c}$$
$$=\frac{c^2(c+1)}{c(c+1)}$$

Se simplifican los factores comunes del numerador y del denominador.

$$\frac{c^2(c+1)}{c(c+1)}$$
$$=\frac{c\cancel{c}\cancel{(c+1)}}{\cancel{c}\cancel{(c+1)}}$$
$$=c$$

Por lo tanto

$$\frac{c^3+c^2}{c^2+c}$$
$$=c$$

3. Simplifique la fracción $\dfrac{a^2b-a^2c}{c^2-b^2}$, $\quad c \neq \pm b.$

Solución:

Se factoriza el numerador por el método de factor común, y el denominador se factoriza usando diferencia de cuadrados.

$$\frac{a^2b - a^2c}{c^2 - b^2}$$

$$= \frac{a^2(b-c)}{(c-b)(c+b)}$$

No se puede eliminar $(b-c)$ con $(c-b)$ porque no son iguales. Pero si se toma -1 como factor común en $(b-c)$, entonces quedan iguales.

$$\frac{a^2(b-c)}{(c-b)(c+b)}$$

$$= \frac{-a^2\cancel{(c-b)}}{\cancel{(c-b)}(c+b)}$$

$$= \frac{-a^2}{c+b}$$

Por lo tanto

$$\frac{a^2b - a^2c}{c^2 - b^2}$$

$$= \frac{-a^2}{c-b}$$

4. Simplifique la fracción $\dfrac{k^3 - kb^2 + bk^2 - b^3}{k-b}$, $k \neq b$.

Solución:

En este caso solo se debe factorizar el numerador usando el método de agrupación de términos.

$$\frac{k^3 - kb^2 + bk^2 - b^3}{k-b}$$

$$= \frac{k\left(k^2 - b^2\right) + b\left(k^2 - b^2\right)}{k-b}$$

$$= \frac{\left(k^2 - b^2\right)\left(k+b\right)}{k-b}$$

Ahora es posible aplicar el método de diferencia de cuadrados.

$$\frac{\left(k^2 - b^2\right)\left(k+b\right)}{k-b}$$

$$= \frac{\left(k-b\right)\left(k+b\right)\left(k+b\right)}{k-b}$$

Se simplifican los factores comunes del numerador y del denominador.

$$\frac{\cancel{\left(k-b\right)}\left(k+b\right)\left(k+b\right)}{\cancel{k-b}}$$

$$= \left(k+b\right)^2$$

Por lo tanto

$$\frac{k^3 - kb^2 + bk^2 - b^3}{k-b}$$

$$= \left(k+b\right)^2$$

Ejercicios:

Simplifique cada una de las siguientes fracciones, las cuales en cada caso cumplen las restricciones necesarias para estar bien definidas.

a) $\dfrac{x^2-25}{x^2+10x+25}$

b) $\dfrac{x^2-1}{2x^3-2x^2}$

c) $\dfrac{x^2-x-6}{kx-3k}$

d) $\dfrac{k-1}{(k-1)^2+(k-1)}$

e) $\dfrac{x^2+x}{(x^2-2x-3)+(x+1)}$

f) $\dfrac{x^4-16}{(x+2)(x-2)}$

g) $\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-x-1}$

h) $\dfrac{25m^2-k^2}{k^2m-5km^2}$

i) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$

j) $\dfrac{4y^2+4k}{y^2a+ka-y^2b-ky}$

Soluciones:

a) Se factoriza el numerador por diferencia de cuadrados y el denominador por primera fórmula notable. Luego se simplifican los factores comunes al numerador y al denominador.

$$\frac{x^2-25}{x^2+10x+25}$$
$$=\frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)^2}$$
$$=\frac{(x-5)\cancel{(x+5)}}{(x+5)\cancel{(x+5)}}$$
$$=\frac{x-5}{x+5}$$

b) Se factoriza el numerador por diferencia de cuadrados y el denominador por factor común. Luego se simplifican los factores comunes al numerador y al denominador.

$$\frac{x^2-1}{2x^3-2x^2}$$
$$=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{2x^2\cancel{(x-1)}}$$
$$=\frac{x+1}{2x^2}$$

c) Se factoriza el numerador por el método de inspección y el denominador por factor común. Luego se simplifican los factores comunes al numerador y al denominador.

$$\frac{x^2-x-6}{kx-3k}$$

$$=\frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{k\cancel{(x-3)}}$$

$$=\frac{x+2}{k}$$

d) Se factoriza solo el denominador por el método de factor común y luego se simplifican los factores comunes del numerador y del denominador.

$$\frac{k-1}{(k-1)^2+(k-1)}$$

$$=\frac{\cancel{k-1}}{\cancel{(k-1)}\left[(k-1)+1\right]}$$

$$=\frac{1}{k-1+1}$$

$$=\frac{1}{k}$$

e) Primero se resuelve la resta del denominador.

$$\left(x^2-2x-3\right)+(x+1)$$

$$=x^2-2x-3+x+1$$

$$=x^2-x-2$$

Ahora se factoriza el numerador por factor común y el denominador por el método de inspección. Luego se simplifican los factores comunes al numerador y al denominador.

$$\frac{x^2+x}{x^2-x-2}$$
$$=\frac{x\cancel{(x+1)}}{(x-2)\cancel{(x+1)}}$$
$$=\frac{x}{x-2}$$

f) El denominador ya se encuentra factorizado, entonces se factoriza solamente el numerador aplicando dos veces consecutivas el método de diferencia de cuadrados. Finalmente se simplifican los factores comunes al numerador y al denominador.

$$\frac{x^4-16}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{(x^2+4)(x^2-4)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{(x^2+4)\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}$$
$$=x^2+4$$

g) Se aplica el método de inspección al numerador y al denominador para factorizarlos y luego se simplifican los factores comunes a ambos.

$$\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-x-1}$$

$$=\frac{\cancel{(2x+1)}(x-4)}{\cancel{(2x+1)}(x-1)}$$

$$=\frac{x-4}{x-1}$$

h) Se factoriza el numerador usando el método de diferencia de cuadrados y el denominador usando el método de factor común. Luego se simplifican los factores comunes al numerador y al denominador.

$$\frac{25m^2-k^2}{k^2m-5km^2}$$

$$=\frac{(5m+k)(5m-k)}{km(k-5m)}$$

$$=\frac{-(5m+k)\cancel{(k-5m)}}{km\cancel{(k-5m)}}$$

$$=\frac{-5m-k}{km}$$

i) Se factoriza el numerador por segunda fórmula notable y el denominador por diferencia de cuadrados. Luego se simplifican los factores comunes al numerador y al denominador.

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{(a-b)\cancel{(a-b)}}{(a+b)\cancel{(a-b)}}$$

$$=\frac{a-b}{a+b}$$

j) Se aplica el método de factor común al numerador y se factoriza el denominador por agrupación de términos. Luego se simplifican los factores comunes al numerador y al denominador.

$$\frac{4y^2+4k}{y^2a+ka-y^2b-kb}$$

$$=\frac{4(y^2+k)}{a(y^2+k)-b(y^2+k)}$$

$$=\frac{4\cancel{(y^2+k)}}{\cancel{(y^2+k)}(a-b)}$$

$$=\frac{4}{a-b}$$