POTENCIA FRACCIONARIA

Ejemplos

1. Exprese la potencia $5^{\frac{2}{3}}$ como una expresión radical.

Solución
Como el exponente es una fracción simplificada se aplica la ley correspondiente.
$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$
Luego se calcula la potencia del subradical.
$\sqrt[3]{5 \cdot 5} = \sqrt[3]{25}$
Por lo tanto, $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25}$.

2. Exprese la potencia $b^{\frac{10}{12}}, \quad b > 0$ como una expresión radical.

Solución
En primer lugar se simplifica la fracción del exponente.
$b^{\frac{10}{12}} = b^{\frac{5}{6}}$
Ahora que el exponente es una fracción simplificada y, además, la base es un número positivo, esto permite aplicar la ley correspondiente.
Por lo tanto, $b^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{b^5}$.

3. Exprese $\sqrt[7]{m^3}, \quad m < 0$ como una potencia.

Solución
Puede notarse que $m < 0$ lo cual es posible porque el índice del radical es impar.
En este caso la base de la potencia del subradical se convierte en la base de la potencia resultante.
El exponente será la fracción positiva que tiene como numerador el exponente del subradical y, como denominador, el índice del radical.
Por lo tanto, $\sqrt[7]{m^3} = m^{\frac{3}{7}}$.

4. Exprese $\sqrt[5]{81}$ como una potencia con base 3.

Solución
Se debe factorizar el subradical para obtener una potencia de base 3.

$\sqrt[5]{81} = \sqrt[5]{3^4}$

Ahora la base de la potencia del subradical se convierte en la base de la potencia resultante.
El exponente será la fracción positiva que tiene como numerador el exponente del subradical y, como denominador, el índice del radical.

Por lo tanto, $\sqrt[5]{3^4} = 3^{\frac{4}{5}}$.

Ejercicios

1. Exprese cada una de las siguientes potencias como una expresión radical.

a) $2^{\frac{15}{25}}$

b) $4^{\frac{1}{3}}$

c) $x^{\frac{3}{4}}, \quad x > 0$

d) $m^{\frac{35}{49}}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$

f) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

g) $\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{3}{6}}, \quad m > 0, \quad k > 0$

h) $\pi^{\frac{1}{5}}$

2. Exprese cada uno de los siguientes radicales como una potencia con exponente fraccionario.

a) $\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[6]{243}$

c) $\sqrt[7]{\frac{125}{81}}$

d) $\sqrt[5]{\frac{49}{4}}$

e) $\sqrt[5]{m^3}$

f) $\sqrt[8]{k^3}, \quad k > 0$

g) $\sqrt[5]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad a \neq 0$

h) $\sqrt{\frac{p}{n}}, \quad p > 0, \quad n > 0$

Soluciones

1. Se presenta una forma de resolver los ejercicios.

a) En primer lugar se simplifica la fracción del exponente.

$2^{\frac{15}{25}} = 2^{\frac{3}{5}}$

Ahora se aplica la ley correspondiente.

$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

Finalmente se calcula la potencia del subradical.

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{2^3} &= \sqrt[5]{2 \cdot 2 \cdot 2} \\ &= \sqrt[5]{8} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2^{\frac{15}{25}} = \sqrt[5]{8}$.

b) En este caso la fracción del exponente está simplificada, de modo que se puede aplicar la ley respectiva y luego se calcula la potencia del subradical.

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{4^1} \\ &= \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$.

c) Se puede aplicar la ley para exponente fraccionario porque la fracción del exponente está simplificada y, además, la base de la potencia es positiva, lo cual es indispensable porque el índice del radical es par.

Por lo tanto, $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$.

d) Primero se simplifica la fracción del exponente.

$$m^{\frac{35}{49}} = m^{\frac{5}{7}}$$

Luego se aplica la ley de potencias para exponente fraccionario.

$$m^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{m^5}$$

Por lo tanto, $m^{\frac{35}{49}} = \sqrt[7]{m^5}$.

e) Como la fracción del exponente está simplificada se aplica la ley respectiva.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

Luego se calcula la potencia del subradical.

$$\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{8}{27}}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{8}{27}}$.

f) Se aplica la ley de potencias para exponente fraccionario dado que la fracción del exponente está simplificada.

$$\left(\frac{-1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{-1}{5}\right)^2}$$

Luego se calcula la potencia del subradical.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{-1}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{-1}{5}\cdot\frac{-1}{5}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{-1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$.

g) Primero se simplifica la fracción del exponente.

$$\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{3}{6}} = \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Como la base de la potencia es positiva se puede aplicar la ley de exponente fraccionario y se calcula la potencia del subradical.

$$\begin{aligned}\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt[2]{\left(\frac{m}{k}\right)^{1}}\\ &= \sqrt{\frac{m}{k}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{3}{6}} = \sqrt{\frac{m}{k}}$.

h) Se aplica la ley de potencias para exponente fraccionario y se calcula la potencia del subradical.

$$\begin{aligned}\pi^{\frac{1}{5}} &= \sqrt[5]{\pi^{1}}\\ &= \sqrt[5]{\pi}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\pi^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\pi}$.

2. Se presenta una forma de resolver los ejercicios.

a) Se factoriza completamente el subradical.

$$\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3}$$

Se aplica la ley correspondiente.

$$\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$$

Por lo tanto, $\sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}}$.

b) Se factoriza completamente el subradical.

$$\sqrt[6]{243} = \sqrt[6]{3^5}$$

Se aplica la ley correspondiente.

$$\sqrt[6]{3^5} = 3^{\frac{5}{6}}$$

Por lo tanto, $\sqrt[6]{243} = 3^{\frac{5}{6}}$.

c) Se factorizan completamente el numerador y el denominador del subradical.

$$\sqrt[7]{\frac{125}{81}} = \sqrt[7]{\frac{5^3}{2^3}}$$

$$= \sqrt[7]{\left(\frac{5}{2}\right)^3}$$

Luego se aplica la ley para exponente fraccionario.

$$\sqrt[7]{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{7}}$$

Por lo tanto, $\sqrt[7]{\frac{125}{81}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{7}}$.

d) Se factorizan completamente el numerador y el denominador del subradical.

$$\sqrt[5]{\frac{49}{4}} = \sqrt[5]{\frac{7^2}{2^2}}$$

$$= \sqrt[5]{\left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

Se aplica la ley de potencias para exponente fraccionario.

$$\sqrt[5]{\left(\frac{7}{2}\right)^2} = \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Por lo tanto, $\sqrt[5]{\dfrac{49}{4}}=\left(\dfrac{7}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$.

e) Se aplica la ley de potencias para exponente fraccionario.

Por lo tanto, $\sqrt[5]{m^3}=m^{\frac{3}{5}}$.

f) Se aplica la ley de potencias para exponente fracionario.

Por lo tanto, $\sqrt[8]{k^3}=k^{\frac{3}{8}}$.

g) Se aplica la ley de potencias para exponente fraccionario.

Por lo tanto, $\sqrt[5]{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2}{5}}$.

h) Se debe recordar que la fracción del radical tiene exponente 1 y el índice es 2.

$$\sqrt{\frac{p}{n}}=\sqrt[2]{\left(\frac{p}{n}\right)^1}$$

Se aplica la ley respectiva.

$$\sqrt[2]{\left(\frac{p}{n}\right)^1}=\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto, $\sqrt{\dfrac{p}{n}}=\left(\dfrac{p}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$.