POTENCIA DE UNA POTENCIA

Ejemplos

1. Calcule la potencia $\left(3^{\frac{3}{4}}\right)^{8}$.

Solución

Se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$$\left(3^{\frac{3}{4}}\right)^{8} = 3^{\frac{3}{4}\cdot 8}$$
$$= 3^{6}$$

Se calcula la potencia resultante.

$$3^{6} = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$$
$$= 729$$

Por lo tanto, $\left(3^{\frac{3}{4}}\right)^{8} = 729$.

2. ¿Qué número es mayor $\left[\left(5^{-2}\right)^{-5}\right]^{\frac{3}{2}}$ ó $\left[\left(5^{6}\right)^{-4}\right]^{\frac{-1}{2}}$?

Solución

Para poder comparar los números es necesario simplificar.

Para el primero de los números se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

$$\left[\left(5^{-2}\right)^{-5}\right]^{\frac{3}{2}} = \left(5^{-2}\right)^{-5\cdot\frac{3}{2}}$$
$$= \left(5^{-2}\right)^{\frac{-15}{2}}$$
$$= 5^{-2\cdot\frac{-15}{2}}$$
$$= 5^{15}$$

Para el segundo de los números se sigue el mismo procedimiento.

$$\left[\left(5^{6}\right)^{-4}\right]^{\frac{-1}{2}}=\left(5^{6}\right)^{-4\cdot\frac{-1}{2}}$$
$$=\left(5^{6}\right)^{2}$$
$$=5^{6\cdot 2}$$
$$=5^{12}$$

Finalmente se comparan los números.

$5^{15}>5^{12}$

Por lo tanto, $\left[\left(5^{-2}\right)^{-5}\right]^{\frac{3}{2}}>\left[\left(5^{6}\right)^{-4}\right]^{\frac{-1}{2}}$.

3. Escriba como potencias de base 3 y ordene de menor a mayor los números $81^{9}, 27^{13}, 9^{17}$.

Solución

Se debe tener en cuenta que:

$81=3^{4}$

$27=3^{3}$

$9=3^{2}$

Esto permite reescribir las expresiones de la siguiente manera:

$81^{9}=\left(3^{4}\right)^{9}$

$27^{13}=\left(3^{3}\right)^{13}$

$9^{17}=\left(3^{2}\right)^{17}$

En cada caso se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$\left(3^{4}\right)^{9}=3^{4\cdot 9}=3^{36}$

$\left(3^{3}\right)^{13}=3^{3\cdot 13}=3^{39}$

$\left(3^{2}\right)^{17}=3^{2\cdot 17}=3^{34}$

Ahora se pueden comparar las potencias.

$3^{34}<3^{36}<3^{39}$

Por lo tanto, $9^{17}<81^{9}<27^{13}$.

4. Calcule la potencia $\left[\left(m^{-18}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{\frac{-10}{9}}$, $m \neq 0$.

Solución

Se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$$\begin{aligned}\left[\left(m^{-18}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{\frac{-10}{9}} &= \left(m^{-18}\right)^{\frac{1}{5}\cdot\frac{-10}{9}}\\ &= \left(m^{-18}\right)^{\frac{-2}{9}}\\ &= m^{-18\cdot\frac{-2}{9}}\\ &= m^{4}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left[\left(m^{-18}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{\frac{-10}{9}} = m^{4}$.

Ejercicios

1. Simplificar al máximo cada una de las siguientes expresiones.

a) $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-3}{5}}\right]^{30}\right\}^{\frac{-2}{9}}$

b) $\left[\left(3^{-3}\right)^{4}\right]^{\frac{-1}{6}}$

c) $\left\{\left[\left(7^{2}\right)^{36}\right]^{\frac{-1}{12}}\right\}^{\frac{-1}{3}}$

d) $\left[\left(k^{4}\right)^{2}\right]^{\frac{3}{8}}$

e) $\left\{\left[\left(\frac{m}{b}\right)^{5}\right]^{\frac{1}{6}}\right\}^{4}$, $b > 0$, $m > 0$

f) $\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}$, $a > 0$

2. Ordene de menor a mayor cada una de las siguientes listas de números.

a) $\left[\left(7^{2}\right)^{\frac{21}{8}}\right]^{\frac{4}{3}}, \left[\left(7^{-3}\right)^{-4}\right]^{\frac{1}{2}}, \left[\left(7^{\frac{4}{3}}\right)^{-3}\right]^{-2}$

b) $16^{6}, 32^{4}, 8^{7}, 4^{11}$

c) $\left[\left(10^{5}\right)^{-1}\right]^{\frac{-9}{15}}, \left(10^{6}\right)^{\frac{1}{3}}, \left[\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{-4}\right]^{\frac{-1}{2}}$

d) $25^{5}, 125^{4}, 625^{2}$

Soluciones

1. A continuación se muestra una manera de resolver cada ejercicio.

a) Se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$$\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-3}{5}}\right]^{30}\right\}^{\frac{-2}{9}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-3}{5}}\right]^{30\cdot\frac{-2}{9}}$$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-3}{5}}\right]^{\frac{-20}{3}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-3}{5}\cdot\frac{-20}{3}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$$

Se calcula la potencia resultante.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$= \frac{16}{81}$$

Por lo tanto, $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-3}{5}}\right]^{30}\right\}^{\frac{-2}{9}} = \frac{16}{81}$.

b) Se conserva la base y se multiplican los exponentes. Luego se calcula la potencia resultante.

$$\begin{aligned}\left[\left(3^{-3}\right)^{4}\right]^{\frac{-1}{6}} &= \left(3^{-3}\right)^{4\cdot\frac{-1}{6}}\\ &= \left(3^{-3}\right)^{\frac{-2}{3}}\\ &= 3^{-3\cdot\frac{-2}{3}}\\ &= 3^{2}\\ &= 9\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left[\left(3^{-3}\right)^{4}\right]^{\frac{-1}{6}} = 9$.

c) Se conserva la base y se multiplican los exponentes. Luego se calcula la potencia resultante.

$$\begin{aligned}\left\{\left[\left(7^{2}\right)^{36}\right]^{\frac{-1}{12}}\right\}^{\frac{-1}{3}} &= \left[\left(7^{2}\right)^{36}\right]^{\frac{-1}{12}\cdot\frac{-1}{3}}\\ &= \left[\left(7^{2}\right)^{36}\right]^{\frac{1}{36}}\\ &= \left(7^{2}\right)^{36\cdot\frac{1}{36}}\\ &= \left(7^{2}\right)^{1}\\ &= 7^{2\cdot 1}\\ &= 7^{2}\\ &= 49\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(7^{2}\right)^{36} = 49$.

d) Se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$$\left[\left(k^4\right)^2\right]^{\frac{3}{8}} = \left(k^4\right)^{2\cdot\frac{3}{8}}$$
$$= \left(k^4\right)^{\frac{3}{4}}$$
$$= k^{4\cdot\frac{3}{4}}$$
$$= k^3$$

Por lo tanto, $\left[\left(k^4\right)^2\right]^{\frac{3}{8}} = k^3$.

e) Se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$$\left\{\left[\left(\frac{m}{b}\right)^5\right]^{\frac{1}{6}}\right\}^4 = \left[\left(\frac{m}{b}\right)^5\right]^{\frac{1}{6}\cdot 4}$$
$$= \left[\left(\frac{m}{b}\right)^5\right]^{\frac{2}{3}}$$
$$= \left(\frac{m}{b}\right)^{5\cdot\frac{2}{3}}$$
$$= \left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{10}{3}}$$

Por lo tanto, $\left\{\left[\left(\frac{m}{b}\right)^5\right]^{\frac{1}{6}}\right\}^4 = \left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{10}{3}}$.

e) Se conserva la base y se suman los exponentes.

$$\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}$$

$$= a^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto, $\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}}$.

2. A continuación se presenta una manera de realizar estos ejercicios.

a) Para cada uno de los números se conserva la base y se multiplican los exponentes.

Para el primero de ellos se obtiene:

$$\left[\left(7^{2}\right)^{\frac{21}{8}}\right]^{\frac{4}{3}} = \left(7^{2}\right)^{\frac{21}{8}\cdot\frac{4}{3}}$$

$$= \left(7^{2}\right)^{\frac{7}{2}}$$

$$= 7^{2\cdot\frac{7}{2}}$$

$$= 7^{7}$$

Para el segundo número se obtiene:

$$\left[\left(7^{-3}\right)^{-4}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(7^{-3}\right)^{-4\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \left(7^{-3}\right)^{-2}$$

$$= 7^{-3\cdot-2}$$

$$= 7^{6}$$

Finalmente, para el tercero de los números se obtiene:

$$\left[\left(7^{\frac{4}{3}}\right)^{-3}\right]^{-2} = \left(7^{\frac{4}{3}}\right)^{-3\cdot -2}$$

$$= \left(7^{\frac{4}{3}}\right)^{6}$$

$$= 7^{\frac{4}{3}\cdot 6}$$

$$= 7^{8}$$

Ahora se comparan las tres potencias obtenidas.

$$7^6 < 7^7 < 7^8$$

Por lo tanto, $\left[\left(7^{-3}\right)^{-4}\right]^{\frac{1}{2}} < \left[\left(7^{2}\right)^{\frac{21}{8}}\right]^{\frac{4}{3}} < \left[\left(7^{\frac{4}{3}}\right)^{-3}\right]^{-2}$.

b) Se debe tener en cuenta que:

$$16 = 2^4$$
$$32 = 2^5$$
$$8 = 2^3$$
$$4 = 2^2$$

Esto permite reescribir los números de la siguiente manera:

$$16^6 = \left(2^4\right)^6$$
$$32^4 = \left(2^5\right)^4$$
$$8^7 = \left(2^3\right)^7$$
$$4^{11} = \left(2^2\right)^{11}$$

En cada caso se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$$\left(2^4\right)^6 = 2^{4\cdot 6} = 2^{24}$$
$$\left(2^5\right)^4 = 2^{5\cdot 4} = 2^{20}$$
$$\left(2^3\right)^7 = 2^{3\cdot 7} = 2^{21}$$
$$\left(2^2\right)^{11} = 2^{2\cdot 11} = 2^{22}$$

Ahora se pueden comparar las potencias.

$$2^{20} < 2^{21} < 2^{22} < 2^{24}$$

Por lo tanto, $32^4 < 8^7 < 4^{11} < 16^6$.

c) Para cada uno de los números se conserva la base y se multiplican los exponentes.

Para el primero de ellos se obtiene:

$$\begin{aligned}\left[\left(10^5\right)^{-1}\right]^{\frac{-9}{15}} &= \left(10^5\right)^{-1\cdot\frac{-9}{15}}\\ &= \left(10^5\right)^{\frac{3}{5}}\\ &= 10^{5\cdot\frac{3}{5}}\\ &= 10^3\end{aligned}$$

Para el segundo de los números se obtiene:

$$\begin{aligned}\left(10^6\right)^{\frac{1}{3}} &= 10^{6\cdot\frac{1}{3}}\\ &= 10^2\end{aligned}$$

Finalmente, para el tercer número se obtiene:

$$\begin{aligned}\left[\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{-4}\right]^{\frac{-1}{2}} &= \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{-4\cdot\frac{-1}{2}}\\ &= \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\\ &= 10^{\frac{1}{2}\cdot 2}\\ &= 10^1\end{aligned}$$

Ahora se pueden comprar las potencias.

$10^1 < 10^2 < 10^3$

Por lo tanto, $\left[\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{-4}\right]^{\frac{-1}{2}} < \left(10^6\right)^{\frac{1}{3}} < \left[\left(10^5\right)^{-1}\right]^{\frac{-9}{15}}$.

e) Se debe tener en cuenta que:

$25 = 5^2$

$125 = 5^3$

$625 = 5^4$

Esto permite reescribir los números de la siguiente manera:

$25^5 = \left(5^2\right)^5$

$125^4 = \left(5^3\right)^4$

$625^2 = \left(5^4\right)^2$

En cada caso se conserva la base y se multiplican los exponentes.

$\left(5^2\right)^5 = 5^{2\cdot 5} = 5^{10}$

$\left(5^3\right)^4 = 5^{3\cdot 4} = 5^{12}$

$\left(5^4\right)^2 = 5^{4\cdot 2} = 5^{8}$

Ahora se pueden comparar las potencias.

$5^8 < 5^{10} < 5^{12}$

Por lo tanto, $625^2 < 25^5 < 125^4$.