POTENCIA DE UN PRODUCTO

Ejemplos

1. Simplifique la expresión $(-2km)^4$.

Solución

Se trata de un producto elevado al exponente 4. Esto es equivalente a elevar a la 4 cada uno de los factores de la base y luego calcular la potencia resultante.

$$\begin{aligned}(-2km)^4 &= (-2)^4 k^4m^4\\ &= (-2\cdot -2\cdot -2\cdot -2)k^4m^4\\ &= 16k^4m^4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(-2km)^4 = 16k^4m^4$.

2. Simplifique la expresión $\left(\frac{2}{3}ab\right)^3$.

Solución

Se trata de un producto elevado al exponente 3. Esto es equivalente a elevar a la 3 cada uno de los factores de la base y luego calcular la potencia resultante.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}ab\right)^3 &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 a^3b^3\\ &= \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)a^3b^3\\ &= \frac{8}{27}a^3b^3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{2}{3}ab\right)^3 = \frac{8}{27}a^3b^3$.

3. Ordene de menor a mayor los resultados de las siguientes operaciones.

a) $6^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot 15^3$

b) $5^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^4$

c) $3^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Solución

a) Se trata de un producto cuyas bases son diferentes pero todas tienen exponente 3 por lo que es equivalente a una expresión donde el exponente es 3 y la base es el producto de las bases.

$$\begin{aligned} 6^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot 15^3 &= \left(6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot 15\right)^3 \\ &= 6^3 \\ &= 216 \end{aligned}$$

b) Se trata de un producto cuyas bases son diferentes pero todas tienen exponente 4 por lo que es equivalente a una expresión donde el exponente es 4 y la base es el producto de las bases.

$$\begin{aligned} 5^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^4 &= \left(5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5}\right)^4 \\ &= 6^4 \\ &= 1\,296 \end{aligned}$$

c) Se trata de un producto cuyas bases son diferentes pero todas tienen exponente 3 por lo que es equivalente a una expresión donde el exponente es 3 y la base es el producto de las bases.

$$\begin{aligned} 3^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \left(3 \cdot \frac{5}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}\right)^3 \\ &= 10^3 \\ &= 1\,000 \end{aligned}$$

Finalmente se comparan los resultados.

$216 < 1\,000 < 1\,296$

Por lo tanto,

$$6^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot 15^3 < 3^3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 < 5^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^4.$$

4. Resuelva la operación $3^4 \cdot 5^4 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 4^4$.

Solución

En este producto las bases son diferentes pero todas tienen el mismo exponente, por ello resulta equivalente a una expresión donde el exponente es 4 y la base es el producto de las bases.

$$\begin{aligned} 3^4 \cdot 5^4 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 4^4 &= \left(3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\right)^4 \\ &= 2^4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $3^4 \cdot 5^4 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 4^4 = 16$.

Ejercicios

1. Simplifique al máximo cada una de las siguientes expresiones.

a) $(3bt)^4$

b) $\left(\dfrac{2}{5}mn\right)^2$

c) $(-4pk)^3$

d) $\left(\dfrac{-2}{3}ac\right)^3$

e) $(-5kp)^2$

f) $\left(\dfrac{-1}{2}bm\right)^5$

2. Realice las siguientes operaciones.

a) $2^3 \cdot 4^3 \cdot \left(\dfrac{1}{16}\right)^3$

b) $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^5$

c) $10^4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \cdot 3^4 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^4$

d) $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 \cdot 15^2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot 6^3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

f) $\left(\dfrac{-2}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{15}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{-1}{5}\right)^3$

Soluciones

1. Detalle de la solución.

a) Se trata de un producto elevado al exponente 4. Esto es equivalente a elevar a la 4 cada uno de los factores de la base y luego calcular la potencia resultante.

$$\begin{aligned}(3bt)^4 &= (3)^4 b^4t^4\\ &= (3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)b^4t^4\\ &= 81b^4t^4\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(3bt)^4 = 81b^4t^4$.

b) Se trata de un producto elevado al exponente 2. Esto es equivalente a elevar a la 2 cada uno de los factores de la base y luego calcular la potencia resultante.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{5}mn\right)^2 &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 m^2n^2\\ &= \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)m^2n^2\\ &= \frac{4}{25}m^2n^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{2}{5}mn\right)^2 = \frac{4}{25}m^2n^2$.

c) Se trata de un producto elevado al exponente 3. Esto es equivalente a elevar a la 3 cada uno de los factores de la base y luego calcular la potencia resultante.

$$\begin{aligned}(-4pk)^3 &= (-4)^3 p^3k^3\\ &= (-4\cdot -4\cdot -4)p^3k^3\\ &= -64p^3k^3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(-4pk)^3 = -64p^3k^3$.

d) Se trata de un producto elevado al exponente 3. Esto es equivalente a elevar a la 3 cada uno de los factores de la base y luego calcular la potencia resultante.

$$\begin{aligned}\left(\frac{-2}{3}ac\right)^3 &= \left(\frac{-2}{3}\right)^3 a^3c^3\\ &= \left(\frac{-2}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{-2}{3}\right)a^3c^3\\ &= \frac{-8}{27}a^3c^3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{-2}{3}ac\right)^3 = \frac{-8}{27}a^3c^3$.

e) Se trata de un producto elevado al exponente 2. Esto es equivalente a elevar a la 2 cada uno de los factores de la base y luego calcular la potencia resultante.

$$\begin{aligned}(-5kp)^2 &= (-5)^2 k^2p^2\\ &= (-5\cdot -5)k^2p^2\\ &= 25k^2p^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(-5kp)^2 = 25k^2p^2$.

f) Se trata de un producto elevado al exponente 5. Esto es equivalente a elevar a la 5 cada uno de los factores de la base y luego calcular la potencia resultante.

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1}{2}bm\right)^5 &= \left(\frac{-1}{2}\right)^5 b^5m^5\\ &= \left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\right)b^5m^5\\ &= \frac{-1}{32}b^5m^5\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{-1}{2}bm\right)^5 = \frac{-1}{32}b^5m^5$.

2. Detalle de la solución.

a) En este producto las bases son diferentes pero todas tienen el mismo exponente, por ello resulta equivalente a una expresión donde el exponente es 3 y la base es el producto de las bases.

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 &= \left(2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{16}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $2^3 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

b) En este producto las bases son diferentes pero todas tienen el mismo exponente, por ello resulta equivalente a una expresión donde el exponente es 5 y la base es el producto de las bases.

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{5}\right)^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 &= \left(\frac{-1}{5} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{6}\right)^5 \\ &= (-1)^5 \\ &= -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{-1}{5}\right)^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = -1$.

c) En este producto las bases son diferentes pero todas tienen el mismo exponente, por ello resulta equivalente a una expresión donde el exponente es 4 y la base es el producto de las bases.

$$
\begin{aligned}
10^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 3^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 &= \left(10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{5}\right)^4 \\
&= (3)^4 \\
&= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\
&= 81
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $10^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 3^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = 81$.

d) En este producto las bases son diferentes pero todas tienen el mismo exponente, por ello resulta equivalente a una expresión donde el exponente es 2 y la base es el producto de las bases.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{-1}{2}\right)^2 \cdot 15^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 &= \left(\frac{-1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \left(\frac{-5}{2}\right)^2 \\
&= \frac{-5}{2} \cdot \frac{-5}{2} \\
&= \frac{25}{4}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\left(\frac{-1}{2}\right)^2 \cdot 15^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

e) En este producto las bases son diferentes pero todas tienen el mismo exponente, por ello resulta equivalente a una expresión donde el exponente es 3 y la base es el producto de las bases.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 6^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 &= \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 6^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

f) En este producto las bases son diferentes pero todas tienen el mismo exponente, por ello resulta equivalente a una expresión donde el exponente es 3 y la base es el producto de las bases.

$$\begin{aligned}\left(\frac{-2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)^3 &= \left(\frac{-2}{5} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{-1}{5}\right)^3 \\ &= \left(\frac{-1}{5}\right)^3 \\ &= \frac{-1}{5} \cdot \frac{-1}{5} \cdot \frac{-1}{5} \\ &= \frac{-1}{125}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)^3 = \frac{-1}{125}$.