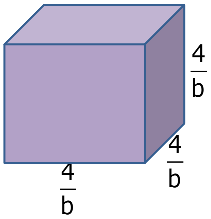
POTENCIA DE UN COCIENTE

Ejemplos

1. La medida de la arista de un cubo está dada en centímetros por $\frac{4}{b}$ con b un número entero positivo. ¿Cuál es, en términos de b, el volumen del cubo?



Solución

Para calcular el volumen del cubo se debe calcular la potencia que tiene como base la medida de la arista y exponente 3.

Como se tiene el cubo de un cociente la expresión es equivalente a la división del cubo del numerador por el cubo del denominador.

$$\left(\frac{4}{b}\right)^3 = \frac{4^3}{b^3}$$
$$= \frac{64}{b^3}$$

Por lo tanto, el volumen del cubo es $\frac{64}{b^3}\ cm^3$.

2. Simplifique la expresión $\left(\frac{2m}{3k}\right)^4$.

Solución

Note que la potencia es de exponente 4 y la base es un cociente. La expresión es equivalente a la división formada por el numerador elevado al exponente 4 y el denominador elevado a la potencia 4. Posteriormente, se trabajan las operaciones indicadas.

$$\left(\frac{2m}{3k}\right)^4 = \frac{(2m)^4}{(3k)^4}$$
$$= \frac{2^4m^4}{3^4k^4}$$
$$= \frac{16m^4}{81k^4}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{2m}{3k}\right)^4 = \frac{16m^4}{81k^4}$.

3. Realice la operación $\frac{57^5}{19^5}$, hasta obtener un número que no esté elevado a ninguna potencia.

Solución

Esta operación es un cociente de potencias que no tienen la misma base pero sí el mismo exponente. Por lo tanto, se puede escribir como una potencia de un cociente.

$$\frac{57^5}{19^5} = \left(\frac{57}{19}\right)^5$$
$$= (3)^5$$
$$= 243$$

Por lo tanto, $\frac{57^5}{19^5} = 243$.

4. Resuelva la operación $\frac{-145^3}{116^3}$.

Solución

Esta operación es un cociente de potencias que no tienen la misma base pero sí el mismo exponente. Por lo tanto, se puede escribir como una potencia de un cociente, de la siguiente manera:

$$\frac{-145^3}{116^3} = -\left(\frac{145}{116}\right)^3$$
$$= -\left(\frac{5}{4}\right)^3$$

Note que se simplificó la expresión fraccionaria, en este caso, ambos números son divisibles por 29.

Ahora se calcula la división del cubo del numerador por el cubo del denominador.

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3}$$

$$= \frac{125}{64}$$

Por lo tanto, $\dfrac{-145^3}{116^3} = \dfrac{-125}{64}$.

Ejercicios

1. Simplifique al máximo cada una de las siguientes expresiones:

a) $\left(\dfrac{5\sqrt{a}}{2m}\right)^2$ con a un número entero positivo

b) $\left(\dfrac{2b}{5}\right)^3$

c) $\left(\dfrac{-3k}{b}\right)^4$, $b \neq 0$

d) $\left(\dfrac{-7mk}{11}\right)^2$

2. Realice las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{35^8}{105^8}$

b) $\dfrac{(66m)^3}{11^3}$

c) $\dfrac{39^8}{78^8}$

d) $\dfrac{(115k)^{10}}{(115m)^{10}}$

Soluciones

1. A continuación se presenta el detalle de una manera de realizar los ejercicios propuestos.

a) Note que se tiene una potencia con exponente 2 y la base es un cociente. La expresión es equivalente a la división del cuadrado del numerador por el cuadrado del denominador.

$$\begin{aligned}\left(\frac{5\sqrt{a}}{2m}\right)^2 &= \frac{\left(5\sqrt{a}\right)^2}{(2m)^2}\\ &= \frac{5^2\left(\sqrt{a}\right)^2}{2^2m^2}\\ &= \frac{25a}{4m^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{5\sqrt{a}}{2m}\right)^2 = \frac{25a}{4m^2}$.

b) En este caso, se trata de la potencia con exponente 3 de un cociente, por ello es equivalente a dividir el cubo del numerador por el cubo del denominador.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2b}{5}\right)^3 &= \frac{(2b)^3}{5^3}\\ &= \frac{2^3b^3}{5^3}\\ &= \frac{8b^3}{125}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{2b}{5}\right)^3 = \frac{8b^3}{125}$.

c) Se tiene la potencia con exponente 4 de un cociente, así que la expresión es equivalente a la división de la potencia con exponente 4 del numerador por la potencia con exponente 4 del denominador.

$$\begin{aligned}\left(\frac{-3k}{b}\right)^4 &= \frac{(-3k)^4}{b^4}\\ &= \frac{(-3)^4 k^4}{b^4}\\ &= \frac{81k^4}{b^4}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{-3k}{b}\right)^4 = \frac{81k^4}{b^4}$.

d) Como se tiene la potencia con exponente 2 de un cociente esto es equivalente a calcular la división del cuadrado del numerador por el cuadrado del denominador.

$$\begin{aligned}\left(\frac{-7mk}{11}\right)^2 &= \frac{(-7mk)^2}{11^2}\\ &= \frac{(-7)^2 m^2k^2}{11^2}\\ &= \frac{49m^2k^2}{121}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{-7mk}{11}\right)^2 = \frac{49m^2k^2}{121}$.

2. A continuación se presenta el detalle de una manera de realizar los ejercicios propuestos.

a) Esta operación es un cociente de potencias que no tienen la misma base pero sí el mismo exponente. Por lo tanto, se puede escribir como una potencia de un cociente.

$$\begin{aligned}\frac{35^4}{105^4} &= \left(\frac{35}{105}\right)^4\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^4\\ &= \frac{1^4}{3^4}\\ &= \frac{1}{81}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{35^4}{105^4} = \frac{1}{81}$.

b) En este cociente las potencias no tienen la misma base pero sí el mismo exponente; por lo tanto, se puede escribir como una potencia de un cociente y luego se procede a simplificar.

$$\begin{aligned}\frac{(66m)^3}{11^3} &= \left(\frac{66m}{11}\right)^3\\ &= (6m)^3\\ &= 6^3m^3\\ &= 216m^3\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{(66m)^3}{11^3} = 216m^3$.

c) Se tiene un cociente en el cual las potencias no tienen la misma base pero sí el mismo exponente, por lo tanto, se puede escribir como una potencia de un cociente y luego se procede a simplificar.

$$\begin{aligned}\frac{39^8}{78^8} &= \left(\frac{39}{78}\right)^8 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ &= \frac{1^8}{2^8} \\ &= \frac{1}{256}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{39^8}{78^8} = \frac{1}{256}$.

d) Como puede observarse en este ejercicio, las potencias del cociente no tienen la misma base pero sí el mismo exponente. Por esta razón, se puede escribir como una potencia de un cociente y luego se procede a simplificar.

$$\begin{aligned}\frac{(115k)^{10}}{(115m)^{10}} &= \left(\frac{115k}{115m}\right)^{10} \\ &= \left(\frac{k}{m}\right)^{10} \\ &= \frac{k^{10}}{m^{10}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{(115k)^{10}}{(115m)^{10}} = \frac{k^{10}}{m^{10}}$.