LEYES DE POTENCIAS

Ejemplos

1. Reescriba la expresión $\frac{x^{-4}b}{c^{-3}}$, $x \neq 0, c \neq 0$ de manera que no contenga exponentes negativos.

Solución

Para obtener una expresión equivalente que no contenga exponentes negativos, se reescriben las expresiones aplicando la ley de potencias para exponente negativo.

$$\begin{aligned}\frac{x^{-4}b}{c^{-3}} &= \frac{\frac{1}{x^4}\cdot b}{\frac{1}{c^3}}\\ &= \frac{\frac{b}{x^4}}{\frac{1}{c^3}}\\ &= \frac{bc^3}{x^4}\end{aligned}$$

Esto es posible puesto que $x \neq 0, c \neq 0$.

Por lo tanto, $\frac{x^{-4}b}{c^{-3}} = \frac{bc^3}{x^4}$.

2. Escriba la expresión $m^{3y+4} \div m^{y-1}, m \neq 0$ como una única potencia.

Solución

Como las bases son iguales se conserva la base y se restan los exponentes.

$$\begin{aligned}m^{3y+4} \div m^{y-1} &= m^{(3y+4)-(y-1)}\\ &= m^{3y+4-y+1}\\ &= m^{2y+5}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $m^{3y+4} \div m^{y-1} = m^{2y+5}$.

3. Realice la operación $\left(0,04\right)^{-3} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{25}} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{17}{3}}$.

Solución

El primero de los factores se puede expresar como una potencia con base $\dfrac{1}{5}$.

$$\begin{aligned}
\left(0,04\right)^{-3} &= \left(\frac{4}{100}\right)^{-3} \\
&= \left(\frac{1}{25}\right)^{-3} \\
&= \left(\frac{1}{5^2}\right)^{-3} \\
&= \left(\frac{1^2}{5^2}\right)^{-3} \\
&= \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\right]^{-3} \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^{-6}
\end{aligned}$$

El segundo de los factores también se puede reescribir como una potencia con base $\dfrac{1}{5}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{25}} &= \sqrt{\frac{1}{5^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1^2}{5^2}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{2}} \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^{1}
\end{aligned}$$

De esta forma se obtiene la multiplicación de tres potencias de igual base, por lo que se conserva la base y se suman los exponentes.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-6}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{17}{3}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-6+1+\frac{17}{3}}$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Por lo tanto, $(0,04)^{-3}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{17}{3}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

4. Simplifique al máximo la expresión $\left(\frac{2m^{-2}b^{4}x}{3b^{2}x^{-1}m^{-3}}\right)^{-2}$, $m\neq 0$, $b\neq 0$, $x\neq 0$.

Solución

Se aplican las leyes de potencias.

$$\left(\frac{2m^{-2}b^{2}x}{3x^{-1}m^{-3}}\right)^{-2}=\frac{2^{-2}m^{4}b^{-4}x^{-2}}{3^{-2}x^{2}m^{6}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2^{2}}\cdot m^{4}\cdot\frac{1}{b^{4}}\cdot\frac{1}{x^{2}}}{\frac{1}{3^{2}}\cdot x^{2}\cdot m^{6}}$$

$$=\frac{\frac{m^{4}}{4b^{4}x^{2}}}{\frac{x^{2}m^{6}}{9}}$$

$$=\frac{9m^{4}}{4b^{4}x^{2}x^{2}m^{6}}$$

$$=\frac{9m^{4-6}}{4b^{4}x^{2+2}}$$

$$=\frac{9m^{-2}}{4b^{4}x^{4}}$$

$$=\frac{9\cdot\frac{1}{m^{2}}}{4b^{4}x^{4}}$$

$$=\frac{\frac{9}{m^{2}}}{4b^{4}x^{4}}$$

$$=\frac{9}{4b^{4}x^{4}m^{2}}$$

Por lo tanto, $\left(\frac{2m^{-2}b^{2}x}{3x^{-1}m^{-3}}\right)^{-2}=\frac{9}{4b^{4}x^{4}m^{2}}$.

Ejercicios

1. Resuelva cada operación y simplifique al máximo el resultado. Procure que no haya exponentes negativos o fraccionarios en los resultados.

a) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{16m^4}}\right)^{12} \cdot \dfrac{1}{16m^4}$, $m > 0$

b) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - (-1)^0}{-2^0}$

c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{81}} + \left(\sqrt[3]{3^6}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(-\sqrt{\dfrac{6}{k}}\right)^2}$, $k > 0$

d) $\left[\left(k^4\right)^3\right]^{\frac{1}{8}} \cdot \left[\left(k^{-2}\right)^3\right]^{\frac{1}{6}}$, $k > 0$

e) $\left\{\left[\left(\dfrac{b}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^3 \div \left\{\left[\left(\dfrac{b}{m}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{-1}$, $b \neq 0$, $m \neq 0$

f) $\left[\left(n^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left(n^{\frac{1}{4}}\right)^{-5} \cdot \left(n^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}$, $n > 0$

2. Simplifique al máximo cada expresión.

a) $\left(\dfrac{a^{-3}m^3}{c^{-1}m^{-5}a}\right)^2$, $c \neq 0$, $m \neq 0$, $a \neq 0$

b) $\left(\dfrac{25k^{-1}}{\sqrt[3]{k^{-3}}}\right)^{\frac{-1}{2}}$, $k > 0$

c) $\left(\dfrac{c^4n^{-2}x}{xn^3c}\right)^{-1}$, $c \neq 0, x \neq 0, n \neq 0$

d) $\left(\dfrac{4m^2c^{-3}}{m^3c^{-2}x}\right)^{2}$, $m \neq 0, c \neq 0, x \neq 0$

Soluciones

1. A continuación se detalla una manera de realizar las operaciones.

a) Se aplican las leyes de potencias para obtener una multiplicación de potencias de igual base.

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{\sqrt[3]{16m^4}}\right)^{12} \cdot \frac{1}{16m^4} &= \left(\sqrt{\sqrt[3]{2^4m^4}}\right)^{12} \cdot \frac{1}{2^4m^4} \\
&= \left[\left\{\left[(2m)^4\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{12} \cdot \frac{1}{(2m)^4} \\
&= (2m)^{4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12} \cdot (2m)^{-4} \\
&= (2m)^{8+-4} \\
&= (2m)^4 \\
&= 2^4m^4 \\
&= 16m^4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\left(\sqrt{\sqrt[3]{16m^4}}\right)^{12} \cdot \dfrac{1}{16m^4} = 16m^4$.

b) Se aplican las leyes de potencias para poder resolver la operación.

$$\begin{aligned}\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-(-1)^0}{-2^0}&=\frac{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3-1}{-1}\\&=\frac{2^{\frac{1}{3}\cdot 3}-1}{-1}\\&=\frac{2^1-1}{-1}\\&=\frac{2-1}{-1}\\&=\frac{1}{-1}\\&=-1\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-(-1)^0}{-2^0}=-1$.

c) Se aplican las leyes de potencias para resolver la operación.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{81}}+\left(\sqrt[3]{3^{6}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(-\sqrt{\frac{6}{k}}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt{3^{4}}}+\left(3^{\frac{6}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[-1\cdot\left(\frac{6}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2}}$$

$$=\frac{\left[\left(3^{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{6}{3}\cdot\frac{1}{2}}}{\left[-1\cdot\left(\frac{6}{k}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2}}$$

$$=\frac{3^{4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}+3^{1}}{(-1)^{2}\cdot\left(\frac{6}{k}\right)^{\frac{1}{2}\cdot 2}}$$

$$=\frac{3^{1}+3^{1}}{1\cdot\left(\frac{6}{k}\right)^{1}}$$

$$=\frac{3+3}{\frac{6}{k}}$$

$$=\frac{6}{\frac{6}{k}}$$

$$=\frac{6k}{6}$$

$$=k$$

Note que esto es válido porque $k>0$.

Por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{\sqrt{81}}+\left(\sqrt[3]{3^{6}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(-\sqrt{\frac{6}{k}}\right)^{2}}=k$.

d) Se aplican las leyes de potencias para obtener una multiplicación de potencias de igual base.

$$\begin{aligned}\left[\left(k^4\right)^3\right]^{\frac{1}{8}} \cdot \left[\left(k^{-2}\right)^3\right]^{\frac{1}{6}} &= k^{4\cdot 3\cdot \frac{1}{8}} \cdot k^{-2\cdot 3\cdot \frac{1}{6}} \\ &= k^{\frac{3}{2}} \cdot k^{-1} \\ &= k^{\frac{3}{2}+-1} \\ &= k^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{k}\end{aligned}$$

Note que esto es válido porque $k > 0$.

Por lo tanto, $\left[\left(k^4\right)^3\right]^{\frac{1}{8}} \cdot \left[\left(k^{-2}\right)^3\right]^{\frac{1}{6}} = \sqrt{k}$.

e) Se aplican las leyes de potencias para obtener una división de potencias de igual base.

$$\begin{aligned}\left\{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^3 \div \left\{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{-1} &= \left(\frac{b}{m}\right)^{2\cdot\frac{1}{5}\cdot 3} \div \left(\frac{b}{m}\right)^{3\cdot\frac{1}{3}\cdot -1} \\ &= \left(\frac{b}{m}\right)^{\frac{6}{5}} \div \left(\frac{b}{m}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{b}{m}\right)^{\frac{6}{5}--1} \\ &= \left(\frac{b}{m}\right)^{\frac{11}{5}} \\ &= \sqrt[5]{\left(\frac{b}{m}\right)^{11}}\end{aligned}$$

Note que esto es válido porque tanto b como m son diferentes de 0.

Por lo tanto, $\left\{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{5}}\right\}^3 \div \left\{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{-1} = \sqrt[5]{\left(\frac{b}{m}\right)^{11}}$.

f) Se aplican las leyes de potencias para obtener una multiplicación de potencias de igual base.

$$\left[\left(n^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left(n^{\frac{1}{4}}\right)^{-5} \cdot \left(n^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{4}\cdot -5} \cdot n^{-4\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{-5}{4}} \cdot n^{-2}$$

$$= n^{\frac{1}{2}+\frac{-5}{4}+-2}$$

$$= n^{\frac{-11}{4}}$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{11}{4}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{n^{11}}}$$

Note que esto es válido porque n es un número positivo.

Por lo tanto, $\left[\left(n^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot \left(n^{\frac{1}{4}}\right)^{-5} \cdot \left(n^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^{11}}}$.

2. A continuación se detalla una manera de realizar las operaciones.

a) Se aplican las leyes de potencias.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a^{-3}m^{3}}{c^{-1}m^{-5}a}\right)^{2} &= \frac{a^{-3\cdot -2}m^{3\cdot 2}}{c^{-1\cdot 2}m^{-5\cdot 2}a^{1\cdot 2}} \\
&= \frac{a^{-6}m^{6}}{c^{-2}m^{-10}a^{2}} \\
&= \frac{\frac{1}{a^{6}}\cdot m^{6}}{\frac{1}{c^{2}}\cdot\frac{1}{m^{10}}\cdot a^{2}} \\
&= \frac{\frac{m^{6}}{a^{6}}}{\frac{a^{2}}{c^{2}m^{10}}} \\
&= \frac{m^{6}c^{2}m^{10}}{a^{6}a^{2}} \\
&= \frac{c^{2}m^{6+10}}{a^{6+2}} \\
&= \frac{c^{2}m^{16}}{a^{8}}
\end{aligned}
$$

Observe que ninguna variable es igual a 0.

Por lo tanto, $\left(\frac{a^{-3}m^{3}}{c^{-1}m^{-5}a}\right)^{2} = \frac{c^{2}m^{16}}{a^{8}}$.

b) Se aplican las leyes de potencias.

$$\left(\frac{25k^{-1}}{\sqrt[3]{k^{-3}}}\right)^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{5^2k^{-1}}{\left(k^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \left(\frac{5^2k^{-1}}{k^{-3\cdot\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{5^{2\cdot\frac{-1}{2}}k^{-1\cdot\frac{-1}{2}}}{k^{-1\cdot\frac{-1}{2}}}$$

$$= \frac{5^{-1}k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{5^1}\cdot k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{k^0}{5}$$

$$= \frac{1}{5}$$

Note que es válido porque $k > 0$.

Por lo tanto, $\left(\frac{25k^{-1}}{\sqrt[3]{k^{-3}}}\right)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{5}$.

c) Se aplican las leyes de potencias.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{c^4n^{-2}x}{xn^3c}\right)^{-1} &= \frac{c^{4\cdot-1}n^{-2\cdot-1}x^{1\cdot-1}}{x^{1\cdot-1}n^{3-1}c^{1\cdot-1}}\\
&= \frac{c^{-4}n^{2}x^{-1}}{x^{-1}n^{-3}c^{-1}}\\
&= \frac{\frac{1}{c^4}\cdot n^2\cdot\frac{1}{x^1}}{\frac{1}{x^1}\cdot\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{c^1}}\\
&= \frac{\frac{n^2}{c^4x^1}}{\frac{1}{x^1n^3c^1}}\\
&= \frac{n^2x^1n^3c^1}{c^4x^1}\\
&= n^{2+3}x^{1-1}c^{1-4}\\
&= n^5x^0c^{-3}\\
&= n^5\cdot 1\cdot\frac{1}{c^3}\\
&= \frac{n^5}{c^3}
\end{aligned}
$$

Observe que $c \neq 0, x \neq 0, n \neq 0$, por lo que la expresión nunca se indefine.

Por lo tanto, $\left(\frac{c^4n^{-2}x}{xn^3c}\right)^{-1} = \frac{n^5}{c^3}$.

d) Se aplican las leyes de potencias.

$$\left(\frac{4m^2c^{-3}}{m^3c^{-2}x}\right)^2 = \frac{4^{1\cdot 2}m^{2\cdot 2}c^{-3\cdot 2}}{m^{3\cdot 2}c^{-2\cdot 2}x^{1\cdot 2}}$$

$$= \frac{4^2m^4c^{-6}}{m^6c^{-4}x^2}$$

$$= \frac{16m^4\cdot\frac{1}{c^6}}{m^6x^2\cdot\frac{1}{c^4}}$$

$$= \frac{\frac{16m^4}{c^6}}{\frac{m^6x^2}{c^4}}$$

$$= \frac{16m^4c^4}{m^6x^2c^6}$$

$$= \frac{16m^{4-6}c^{4-6}}{x^2}$$

$$= \frac{16m^{-2}c^{-2}}{x^2}$$

$$= \frac{16\cdot\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{c^2}}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{16}{m^2c^2}}{x^2}$$

$$= \frac{16}{m^2c^2x^2}$$

Lo cual es válido porque $m \neq 0, c \neq 0, x \neq 0$.

Por lo tanto, $\left(\frac{4m^2c^{-3}}{m^3c^{-2}x}\right)^2 = \frac{16}{m^2c^2x^2}$.