FÓRMULAS NOTABLES: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Ejemplos

1. Calcule el resultado de $(2x-5y)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a $2x$. El término y corresponde a $5y$.

$$\begin{aligned}(2x-5y)^2 &= \boxed{(2x)^2} - 2\cdot 2x\cdot 5y + \boxed{(5y)^2}\\ &= 4x^2 - 20xy + 25y^2\end{aligned}$$

Recuerde que:
$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$ $\quad (a^n)^m = a^{n\cdot m}$

2. Calcule el resultado de $(5w^3y - 3q^2)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a $5w^3y$. El término y es $3q^2$.

$$\begin{aligned}(5w^3y - 3q^2)^2 &= \boxed{(5w^3y)^2} - 2\cdot 5w^3y\cdot 3q^2 + (3q^2)^2\\ &= \boxed{25w^6y^2} - 30w^3yq^2 + 9q^4\end{aligned}$$

$(5w^3y)^2 = 5^2(w^3)^2y^2 = 25w^6y^2$

3. Desarrollar $\left(\frac{3}{5y} - xy\right)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a $\frac{3}{5y}$. El término y es xy.

$$\left(\frac{3}{5y} - xy\right)^2 = \boxed{\left(\frac{3}{5y}\right)^2} - 2\cdot\frac{3}{5y}\cdot xy + (xy)^2$$

Recuerde que:
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, con $b \neq 0$.

$$= \frac{9}{25y^2} - \frac{6xy}{5y} + x^2y^2$$
$$= \frac{9}{25y^2} - \frac{6x}{5} + x^2y^2$$

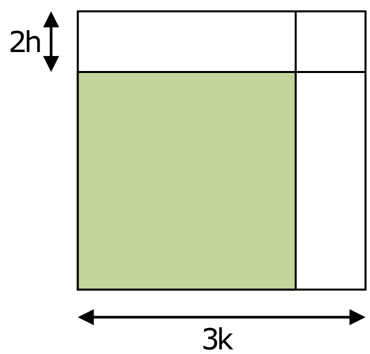
4. Desarrollar $\left(a^{x+3} - b^{2x-1}\right)^2$.

Solución
Se aplica la fórmula notable $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a a^{x+3}. El término y es b^{2x-1}.

$$\begin{aligned}\left(a^{x+3} - b^{2x-1}\right)^2 &= \left(a^{x+3}\right)^2 - 2 \cdot a^{x+3} \cdot b^{2x-1} + \left(b^{2x-1}\right)^2 \\ &= a^{2(x+3)} - 2a^{x+3}b^{2x-1} + b^{2(2x-1)} \\ &= a^{2x+6} - 2a^{x+3}b^{2x-1} + b^{4x-2}\end{aligned}$$

5. Determinar la expresión algebraica que representa el área de la región sombreada.



Solución
Hay que determinar el área del cuadrado verde en la figura.
Lado del cuadrado mayor: $3k$
Lado del cuadrado verde: $3k - 2h$

Para determinar el área A del cuadrado verde se eleva a la 2 la medida de su lado: $(3k - 2h)^2$.

$$A = (3k - 2h)^2$$
$$A = (3k)^2 - 2 \cdot 3k \cdot 2h + (2h)^2$$
$$A = 9k^2 - 12hk + 4h^2$$

El área sombreada en la figura se representa por $9k^2 - 12hk + 4h^2$.

6. Realice la operación indicada.

$$\left(\frac{1}{4}x^3 - 2x^2\right)^2 - \left(x^2 - 2x^3\right)^2$$

Solución
Esta operación consta de la resta de 2 productos notables.

- Se desarrolla cada producto notable:

$$\left(\frac{1}{4}x^3 - 2x^2\right)^2 = \left(\frac{1}{4}x^3\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{4}x^3\cdot 2x^2 + \left(2x^2\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}x^6 - x^5 + 4x^4$$

$$\left(x^2 - 2x^3\right)^2 = \left(x^2\right)^2 - 2\cdot x^2\cdot 2x^3 + \left(2x^3\right)^2$$

$$= x^4 - 4x^5 + 4x^6$$

- Se restan los resultados obtenidos:

$$\frac{1}{16}x^6 - x^5 + 4x^4 - \left(x^4 - 4x^5 + 4x^6\right) = \frac{1}{16}x^6 - x^5 + 4x^4 - x^4 + 4x^5 - 4x^6$$

$$= \frac{-63}{16}x^6 + 3x^5 + 3x^4$$

Note que se redujeron los términos semejantes.

Ejercicios

1. Desarrolle cada producto notable.

a) $(5m - 2n^2)^2$

b) $(2x^3y^5 - 1)^2$

c) $\left(\frac{7}{5}x^2 - 2xy^3\right)^2$

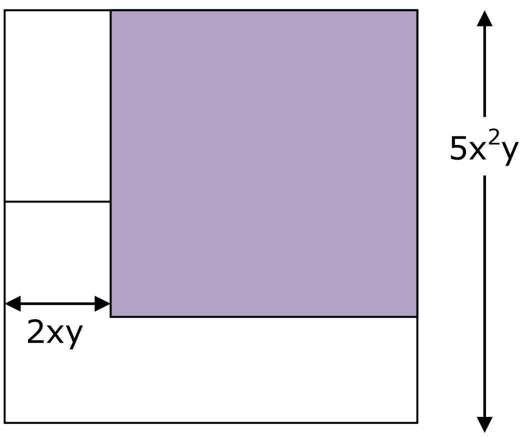
d) $(1 - 2x^3y^2)^2$

e) $\left(\frac{x^2y}{3} - 3x^3\right)^2$

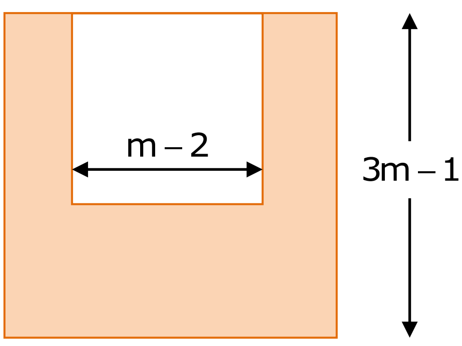
f) $(a^n - a^{n+1})^2$

g) $(m^{2x+3} - m^{1-x})^2$

2. Determinar el área de la región sombreada. Considere que el polígono blanco más grande es un cuadrado y el morado también lo es.



3. Determine la expresión reducida correspondiente al área de la región sombreada en la siguiente figura formada por cuadrados.



4. Resolver las siguientes operaciones:

a) $(1 - a)^2 - (2a - b)^2 + 2(1 - ab)^2$

b) $x(x^2 - 1)(x^2 - 1) - (1 - x)^2$

c) $a^{n-1}(a^n - a^{n+1})^2 - 2(a^{n-1} - a^{n+1})^2$

Soluciones

1. A continuación se muestra una manera de trabajar cada ejercicio.

a) $(5m-2n^2)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a $5m$. El término y corresponde a $2n^2$.

$$\begin{aligned}(5m-2n^2)^2 &= (5m)^2 - 2\cdot 5m\cdot 2n^2 + (2n^2)^2\\ &= 25m^2 - 20mn^2 + 4n^4\end{aligned}$$

b) $(2x^3y^5-1)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a $2x^3y^5$. El término y corresponde a 1.

$$\begin{aligned}(2x^3y^5-1)^2 &= (2x^3y^5)^2 - 2\cdot 2x^3y^5\cdot 1 + 1^2\\ &= 4x^6y^{10} - 4x^3y^5 + 1\end{aligned}$$

c) $\left(\frac{7}{5}x^2 - 2xy^3\right)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a $\frac{7}{5}x^2$. El término y corresponde a $2xy^3$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{7}{5}x^2 - 2xy^3\right)^2 &= \left(\frac{7}{5}x^2\right)^2 - 2\cdot\frac{7}{5}x^2\cdot 2xy^3 + (2xy^3)^2\\ &= \frac{49}{25}x^4 - \frac{28}{5}x^3y^3 + 4x^2y^6\end{aligned}$$

d) $(1-2x^3y^2)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a 1. El término y corresponde a $2x^3y^2$.

$$\begin{aligned}(1-2x^3y^2)^2 &= 1^2 - 2\cdot 1\cdot 2x^3y^2 + (2x^3y^2)^2\\ &= 1 - 4x^3y^2 + 4x^6y^4\end{aligned}$$

e) $\left(\dfrac{x^2y}{3} - 3x^3\right)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a $\dfrac{x^2y}{3}$. El término y corresponde a $3x^3$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2y}{3} - 3x^3\right)^2 &= \left(\frac{x^2y}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{x^2y}{3}\cdot 3x^3 + \left(3x^3\right)^2\\ &= \frac{x^4y^2}{9} - 2x^5y + 9x^6\end{aligned}$$

f) $\left(a^n - a^{n+1}\right)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a a^n. El término y corresponde a a^{n+1}.

$$\begin{aligned}\left(a^n - a^{n+1}\right)^2 &= \left(a^n\right)^2 - 2\cdot a^n\cdot a^{n+1} + \left(a^{n+1}\right)^2\\ &= a^{2n} - 2\cdot a^{n+n+1} + a^{2(n+1)}\\ &= a^{2n} - 2a^{2n+1} + a^{2n+2}\end{aligned}$$

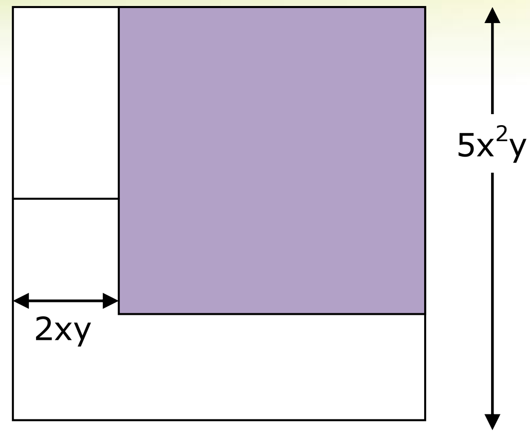
g) $\left(m^{2x+3} - m^{1-x}\right)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

El término x corresponde a m^{2x+3}. El término y corresponde a m^{1-x}.

$$\begin{aligned}\left(m^{2x+3} - m^{1-x}\right)^2 &= \left(m^{2x+3}\right)^2 - 2\cdot m^{2x+3}\cdot m^{1-x} + \left(m^{1-x}\right)^2\\ &= m^{2(2x+3)} - 2m^{2x+3+1-x} + m^{2(1-x)}\\ &= m^{4x+6} + 2m^{x+4} + m^{2-2x}\end{aligned}$$

2. Determinar el área de la región sombreada.



Lado del cuadrado de mayor área: $5x^2y$

Lado del cuadrado de menor área: $5x^2y-2xy$

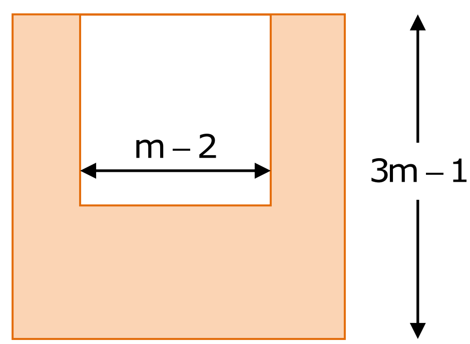
Para determinar el área A de un cuadrado se eleva al cuadrado la medida de su lado.

En este caso, como la medida del lado del cuadrado morado es $5x^2y-2xy$, entonces su área se calcula así: $A=\left(5x^2y-2xy\right)^2$.

$$\begin{aligned} A &= \left(5x^2y-2xy\right)^2 \\ &= \left(5x^2y\right)^2-2\cdot 5x^2y\cdot 2xy+\left(2xy\right)^2 \\ &= 25x^4y^2-20x^3y^2+4x^2y^2 \end{aligned}$$

El área sombreada en la figura es $25x^4y^2-20x^3y^2+4x^2y^2$.

3. Determine la expresión reducida correspondiente al área de la región sombreada en la siguiente figura formada por cuadrados:



Para determinar el área de la parte sombreada, se puede restar el área del cuadrado pequeño del área del cuadrado mayor.

Área cuadrado grande – Área cuadrado pequeño

$$\begin{aligned} \left(3m-1\right)^2-\left(m-2\right)^2 &= \left[\left(3m\right)^2-2\cdot 3m\cdot 1+1^2\right]-\left(m^2-2\cdot m\cdot 2+2^2\right) \\ &= 9m^2-6m+1-\left(m^2-4m+4\right) \\ &= 9m^2-6m+1-m^2+4m-4 \\ &= 8m^2-2m-3 \end{aligned}$$

El área de la parte sombreada en la figura se representa por $8m^2-2m-3$.

4. Se presenta una forma de realizar las operaciones.

a) Una manera de realizalo es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&(1-a)^2-(2a-b)^2+2(1-ab)^2\\
&=\left(1^2-2\cdot 1\cdot a+a^2\right)-\left[(2a)^2-2\cdot 2a\cdot b+b^2\right]+2\left[1^2-2\cdot 1\cdot ab+(ab)^2\right]\\
&=\left(1-2a+a^2\right)-\left(4a^2-4ab+b^2\right)+2\left(1-2ab+a^2b^2\right)\\
&=1-2a+a^2-4a^2+4ab-b^2+2-4ab+2a^2b^2\\
&=2a^2b^2-3a^2-b^2-2a+3
\end{aligned}
$$

b) Una manera de realizalo es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
x\left(x^2-1\right)\left(x^2-1\right)-(1-x)^2 &= x\left(x^2-1\right)^2-(1-x)^2\\
&=x\left[\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot 1+1^2\right]-\left(1^2-2\cdot 1\cdot x+x^2\right)\\
&=x\left(x^4-2x^2+1\right)-\left(1-2x+x^2\right)\\
&=x^5-2x^3+x-\left(1-2x+x^2\right)\\
&=x^5-2x^3+x-1+2x-x^2\\
&=x^5-2x^3-x^2+3x-1
\end{aligned}
$$

c) Una manera de realizalo es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&a^{n-1}\left(a^n-a^{n+1}\right)^2-2\left(a^{n-1}-a^{n+1}\right)^2\\
&=a^{n-1}\left[\left(a^n\right)^2-2\cdot a^n\cdot a^{n+1}+\left(a^{n+1}\right)^2\right]-2\left[\left(a^{n-1}\right)^2-2\cdot a^{n-1}\cdot a^{n+1}+\left(a^{n+1}\right)^2\right]\\
&=a^{n-1}\left(a^{2n}-2a^{n+n+1}+a^{2(n+1)}\right)-2\left(a^{2(n-1)}-2a^{n-1+n+1}+a^{2(n+1)}\right)\\
&=a^{n-1}\left(a^{2n}-2a^{2n+1}+a^{2n+2}\right)-2\left(a^{2n-2}-2a^{2n}+a^{2n+2}\right)\\
&=a^{n-1+2n}-2a^{n-1+2n+1}+a^{n-1+2n+2}-2a^{2n-2}+4a^{2n}-2a^{2n+2}\\
&=a^{3n-1}-2a^{3n}+a^{3n+1}-2a^{2n-2}+4a^{2n}-2a^{2n+2}
\end{aligned}
$$