FÓRMULAS NOTABLES: $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Ejemplos

1. Efectúe la operación $(4a-3b)^3$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, donde el término x corresponde a $4a$ y el término y corresponde a $3b$.

$$\begin{aligned}(4a-3b)^3 &= (4a)^3 - 3\cdot(4a)^2\cdot 3b + 3\cdot 4a\cdot(3b)^2 - (3b)^3\\ &= 64a^3 - 3\cdot 16a^2\cdot 3b + 3\cdot 4a\cdot 9b^2 - 27b^3\\ &= 64a^3 - 144a^2b + 108ab^2 - 27b^3\end{aligned}$$

2. Efectúe la operación $(2m^2n^3 - mn^2)^3$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, donde el término x corresponde a $2m^2n^3$ y el término y corresponde a mn^2.

$$\begin{aligned}(2m^2n^3 - mn^2)^3 &= (2m^2n^3)^3 - 3\cdot(2m^2n^3)^2\cdot mn^2 + 3\cdot 2m^2n^3\cdot(mn^2)^2 - (mn^2)^3\\ &= 8m^6n^9 - 3\cdot 4m^4n^6\cdot mn^2 + 3\cdot 2m^2n^3\cdot m^2n^4 - m^3n^6\\ &= 8m^6n^9 - 12m^5n^8 + 6m^4n^7 - m^3n^6\end{aligned}$$

3. Efectúe la operación $\left(1 - \frac{1}{2}x^2y\right)^3$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, donde el término x corresponde a 1 y el término y corresponde a $\frac{1}{2}x^2y$.

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{2}x^2y\right)^3 &= 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}x^2y + 3\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2y\right)^3\\ &= 1 - 3\cdot 1\cdot\frac{1}{2}x^2y + 3\cdot 1\cdot\frac{1}{4}x^4y^2 - \frac{1}{8}x^6y^3\\ &= 1 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{4}x^4y^2 - \frac{1}{8}x^6y^3\end{aligned}$$

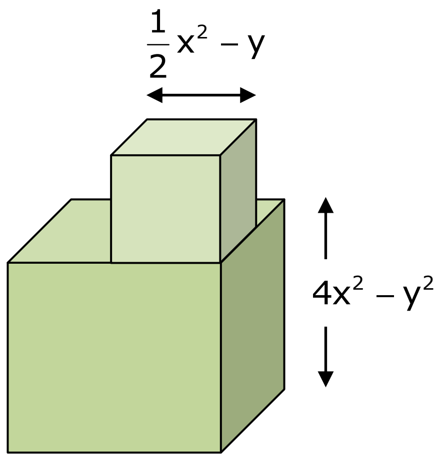
4. Efectúe la operación $\left(x^{a+1}-x^{2a-1}\right)^3$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$, donde el término x corresponde a x^{a+1} y el término y corresponde a x^{2a-1}.

$$\begin{aligned}\left(x^{a+1}-x^{2a-1}\right)^3 &= \left(x^{a+1}\right)^3-3\cdot\left(x^{a+1}\right)^2\cdot x^{2a-1}+3\cdot x^{a+1}\cdot\left(x^{2a-1}\right)^2-\left(x^{2a-1}\right)^3\\ &= x^{3(a+1)}-3\cdot x^{2(a+1)}\cdot x^{2a-1}+3\cdot x^{a+1}\cdot x^{2(2a-1)}-x^{3(2a-1)}\\ &= x^{3a+3}-3\cdot x^{2a+2}\cdot x^{2a-1}+3\cdot x^{a+1}\cdot x^{4a-2}-x^{6a-3}\\ &= x^{3a+3}-3x^{2a+2+2a-1}+3x^{a+1+4a-2}-x^{6a-3}\\ &= x^{3a+3}-3x^{4a+1}+3x^{5a-1}-x^{6a-3}\end{aligned}$$

5. Determine el volumen del sólido geométrico, formado por dos cubos, que se muestra en la figura de al lado.



Solución

El volumen V de un cubo se determina con la fórmula $V=l^3$, donde l representa la medida del lado del cubo.

La medida del lado del cubo pequeño es $\frac{1}{2}x^2-y$, entonces su volumen es $\left(\frac{1}{2}x^2-y\right)^3$.

La medida del lado del cubo grande es $4x^2-y^2$, entonces su volumen es $\left(4x^2-y^2\right)^3$.

El volumen del sólido geométrico corresponde a la suma de los volúmenes de los 2 cubos que lo forman:

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - y\right)^3 + \left(4x^2 - y^2\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\cdot y + 3\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot y^2 - y^3 + \left(4x^2\right)^3 - 3\cdot\left(4x^2\right)^2\cdot y^2 + 3\cdot 4x^2\cdot\left(y^2\right)^2 - \left(y^2\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}x^6 - 3\cdot\frac{1}{4}x^4\cdot y + 3\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot y^2 - y^3 + 64x^6 - 3\cdot 16x^4\cdot y^2 + 3\cdot 4x^2\cdot y^4 - y^6$$

$$= \frac{1}{8}x^6 - \frac{3}{4}x^4y + \frac{3}{2}x^2y^2 - y^3 + 64x^6 - 48x^4y^2 + 12x^2y^4 - y^6$$

$$= 64\frac{1}{8}x^6 - \frac{3}{4}x^4y + \frac{3}{2}x^2y^2 - y^3 - 48x^4y^2 + 12x^2y^4 - y^6$$

El volumen del sólido geométrico es

$64\frac{1}{8}x^6 - \frac{3}{4}x^4y + \frac{3}{2}x^2y^2 - y^3 - 48x^4y^2 + 12x^2y^4 - y^6$ unidades cúbicas.

Ejercicios

1. Efectúe cada producto notable.

a) $\left(2x - y^2\right)^3$

b) $\left(a^2b^3 - 2a\right)^3$

c) $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)^3$

d) $\left(\frac{ab^2}{3} - a\right)^3$

e) $\left(m^{x-1} - m^{x+4}\right)^3$

2. Efectúe las operaciones y reduzca los términos semejantes en la siguiente operación $\left(1 - 2x^2\right)^3 - (x-1)^3$.

Soluciones

1. Efectúe cada producto notable.

a) $\left(2x - y^2\right)^3$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, donde el término x corresponde a $2x$ y el término y corresponde a y^2.

$$\begin{aligned}\left(2x - y^2\right)^3 &= (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot y^2 + 3\cdot 2x\cdot\left(y^2\right)^2 - \left(y^2\right)^3\\ &= 8x^3 - 3\cdot 4x^2\cdot y^2 + 3\cdot 2x\cdot y^4 - y^6\\ &= 8x^3 - 12x^2y^2 + 6xy^4 - y^6\end{aligned}$$

b) $\left(a^2b^3 - 2a\right)^3$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, donde el término x corresponde a a^2b^3 y el término y corresponde a $2a$.

$$\begin{aligned}\left(a^2b^3 - 2a\right)^3 &= \left(a^2b^3\right)^3 - 3\cdot\left(a^2b^3\right)^2\cdot 2a + 3\cdot a^2b^3\cdot(2a)^2 - (2a)^3\\ &= a^6b^9 - 3\cdot a^4b^6\cdot 2a + 3\cdot a^2b^3\cdot 4a^2 - 8a^3\\ &= a^6b^9 - 6a^5b^6 + 12a^4b^3 - 8a^3\end{aligned}$$

c) $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)^3$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, donde el término x corresponde a $\frac{2}{3}x^2$ y el término y corresponde a $\frac{1}{2}y^2$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)^3 &= \left(\frac{2}{3}x^2\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{2}{3}x^2\right)^2\cdot\frac{1}{2}y^2 + 3\cdot\frac{2}{3}x^2\cdot\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y^2\right)^3 \\ &= \frac{8}{27}x^6 - 3\cdot\frac{4}{9}x^4\cdot\frac{1}{2}y^2 + 3\cdot\frac{2}{3}x^2\cdot\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{8}y^6 \\ &= \frac{8}{27}x^6 - \frac{2}{3}x^4y^2 + \frac{1}{2}x^2y^4 - \frac{1}{8}y^6\end{aligned}$$

d) $\left(\frac{ab^2}{3} - a\right)^3$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, donde el término x corresponde a $\frac{ab^2}{3}$ y el término y corresponde a a.

$$\begin{aligned}\left(\frac{ab^2}{3} - a\right)^3 &= \left(\frac{ab^2}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{ab^2}{3}\right)^2\cdot a + 3\cdot\frac{ab^2}{3}\cdot a^2 - a^3 \\ &= \frac{a^3b^6}{27} - 3\cdot\frac{a^2b^4}{9}\cdot a + 3\cdot\frac{ab^2}{3}\cdot a^2 - a^3 \\ &= \frac{a^3b^6}{27} - \frac{a^3b^4}{3} + a^3b^2 - a^3\end{aligned}$$

e) $\left(m^{x-1} - m^{x+4}\right)^3$

Se aplica la fórmula notable $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, donde el término x corresponde a m^{x-1} y el término y corresponde a m^{x+4}.

$$\begin{aligned}&\left(m^{x-1} - m^{x+4}\right)^3 = \left(m^{x-1}\right)^3 - 3\cdot\left(m^{x-1}\right)^2\cdot m^{x+4} + 3\cdot m^{x-1}\cdot\left(m^{x+4}\right)^2 - \left(m^{x+4}\right)^3 \\ &= m^{3(x-1)} - 3\cdot m^{2(x-1)}\cdot m^{x+4} + 3\cdot m^{x-1}\cdot m^{2(x+4)} - m^{3(x+4)} \\ &= m^{3x-3} - 3\cdot m^{2x-2}\cdot m^{x+4} + 3\cdot m^{x-1}\cdot m^{2x+8} - m^{3x+12} \\ &= m^{3x-3} - 3m^{2x-2+x+4} + 3m^{x-1+2x+8} - m^{3x+12} \\ &= m^{3x-3} - 3m^{3x+2} + 3m^{3x+7} - m^{3x+12}\end{aligned}$$

2. Efectúe las operaciones y reduzca los términos semejantes en la siguiente operación $\left(1-2x^{2}\right)^{3}-\left(x-1\right)^{3}$.

$$\left(1-2x^{2}\right)^{3}-\left(x-1\right)^{3}$$

$$=1^{3}-3\cdot 1^{2}\cdot 2x^{2}+3\cdot 1\cdot\left(2x^{2}\right)^{2}-\left(2x^{2}\right)^{3}-\left(x^{3}-3\cdot x^{2}\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^{2}-1^{3}\right)$$

$$=1-3\cdot 1\cdot 2x^{2}+3\cdot 1\cdot 4x^{4}-8x^{6}-\left(x^{3}-3\cdot x^{2}\cdot 1+3\cdot x\cdot 1-1\right)$$

$$=1-6x^{2}+12x^{4}-8x^{6}-\left(x^{3}-3x^{2}+3x-1\right)$$

$$=1-6x^{2}+12x^{4}-8x^{6}-x^{3}+3x^{2}-3x+1$$

$$=2-3x^{2}+12x^{4}-8x^{6}-x^{3}-3x$$