**FÓRMULAS NOTABLES:** $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

## Ejemplos

**1.** Desarrollar $(2x+3y)^3$.

**Solución**

Se utiliza la fórmula notable $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$; donde el término x corresponde a $2x$; el término y es $3y$.

$$\begin{aligned}(2x+3y)^3 &= (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 3y + 3\cdot 2x\cdot(3y)^2 + (3y)^3\\ &= 8x^3 + 3\cdot 4x^2\cdot 3y + 3\cdot 2x\cdot 9y^2 + 27y^3\\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3\end{aligned}$$

**2.** Desarrollar $(m^2n+2n)^3$.

**Solución**

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$; donde el término x corresponde a $m^2n$. El término y es $2n$.

$$\begin{aligned}(m^2n+2n)^3 &= (m^2n)^3 + 3\cdot(m^2n)^2\cdot 2n + 3\cdot m^2n\cdot(2n)^2 + (2n)^3\\ &= m^6n^3 + 3\cdot m^4n^2\cdot 2n + 3\cdot m^2n\cdot 4n^2 + 8n^3\\ &= m^6n^3 + 6m^4n^3 + 12m^2n^3 + 8n^3\end{aligned}$$

**3.** Desarrollar $(1+7x^3y)^3$.

**Solución**

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$; donde el término x corresponde a $1$. El término y es $7x^3y$.

$$\begin{aligned}(1+7x^3y)^3 &= 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 7x^3y + 3\cdot 1\cdot(7x^3y)^2 + (7x^3y)^3\\ &= 1 + 3\cdot 1\cdot 7x^3y + 3\cdot 1\cdot 49x^6y^2 + 343x^9y^3\\ &= 1 + 21x^3y + 147x^6y^2 + 343x^9y^3\end{aligned}$$

**4.** Desarrollar $\left(a^n + a^{n+1}\right)^3$.

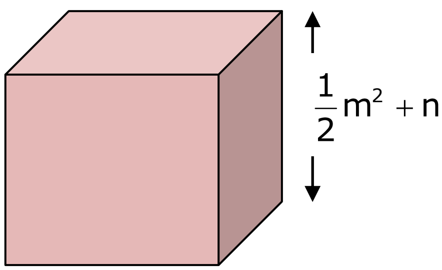
**Solución**

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

El término $x$ corresponde a $a^n$. El término $y$ es $a^{n+1}$.

$$
\begin{aligned}
\left(a^n + a^{n+1}\right)^3 &= \left(a^n\right)^3 + 3\cdot\left(a^n\right)^2\cdot a^{n+1} + 3\cdot a^n\cdot\left(a^{n+1}\right)^2 + \left(a^{n+1}\right)^3\\
&= a^{3n} + 3\cdot a^{2n}\cdot a^{n+1} + 3\cdot a^n\cdot a^{2(n+1)} + a^{3(n+1)}\\
&= a^{3n} + 3\cdot a^{2n}\cdot a^{n+1} + 3\cdot a^n\cdot a^{2n+2} + a^{3n+3}\\
&= a^{3n} + 3a^{2n+n+1} + 3a^{n+2n+2} + a^{3n+3}\\
&= a^{3n} + 3a^{3n+1} + 3a^{3n+2} + a^{3n+3}
\end{aligned}
$$

**5.** Determinar el volumen del siguiente cubo:




**Solución**

El volumen V de un cubo se determina con la fórmula $V = l^3$, donde $l$ representa la medida del lado del cubo.

La medida del lado del cubo es $\frac{1}{2}m^2 + n$, entonces su volumen es $\left(\frac{1}{2}m^2 + n\right)^3$.

Se debe desarrollar la expresión $\left(\frac{1}{2}m^2 + n\right)^3$ aplicando la fórmula notable

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

El término x corresponde a $\frac{1}{2}m^2$. El término y es $n$.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}m^2 + n\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}m^2\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}m^2\right)^2\cdot n + 3\cdot\frac{1}{2}m^2\cdot n^2 + n^3\\
&= \frac{1}{8}m^6 + 3\cdot\frac{1}{4}m^4\cdot n + 3\cdot\frac{1}{2}m^2\cdot n^2 + n^3\\
&= \frac{1}{8}m^6 + \frac{3}{4}m^4n + \frac{3}{2}m^2n^2 + n^3
\end{aligned}
$$

El volumen del cubo se representa por $\frac{1}{8}m^6+\frac{3}{4}m^4n+\frac{3}{2}m^2n^2+n^3$.

**6.** Realice la operación indicada.

$$(2a^2+3)^3-\left(2+\frac{a^2}{2}\right)^3$$

**Solución**

- Se desarrolla cada término de la operación:

$$\begin{aligned}(2a^2+3)^3 &= (2a^2)^3+3\cdot(2a^2)^2\cdot 3+3\cdot 2a^2\cdot 3^2+3^3\\ &= 8a^6+3\cdot 4a^4\cdot 3+3\cdot 2a^2\cdot 9+27\\ &= 8a^6+36a^4+54a^2+27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(2+\frac{a^2}{2}\right)^3 &= 2^3+3\cdot 2^2\cdot\frac{a^2}{2}+3\cdot 2\cdot\left(\frac{a^2}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2}{2}\right)^3\\ &= 8+3\cdot 4\cdot\frac{a^2}{2}+3\cdot 2\cdot\frac{a^4}{4}+\frac{a^6}{8}\\ &= 8+6a^2+\frac{3a^4}{2}+\frac{a^6}{8}\end{aligned}$$

- Se restan los resultados obtenidos:

$$8a^6+36a^4+54a^2+27-\left(8+6a^2+\frac{3a^4}{2}+\frac{a^6}{8}\right)$$

$$=8a^6+36a^4+54a^2+27-8-6a^2-\frac{3a^4}{2}-\frac{a^6}{8}$$

$$=\frac{63}{8}a^6+\frac{69}{2}a^4+48a^2+19$$

Se redujeron los términos semejantes.

## Ejercicios

**1.** Desarrolle cada producto notable.

a) $\left(5n+3n^2\right)^3$

b) $\left(x^2y^4+2z\right)^3$

c) $\left(\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2\right)^3$

d) $\left(1+\frac{m^2x^2}{2}\right)^3$

e) $\left(a^{x+1}+a^{2x-1}\right)^3$

**2.** Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\left(1+x^2y\right)^3-\left(2x+y\right)^3$

b) $\left(a+1\right)^3-\left[\left(1+a\right)^3-\left(1+b\right)^3\right]$

c) $\left(a^n+a^{n-1}\right)^3-2\left(a^{n-1}+a\right)^3$

## Soluciones

**1.** Desarrolle cada producto notable.

a) $\left(5n+3n^2\right)^3$

Se utiliza la fórmula notable $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, donde el término $x$ corresponde a $5n$. El término $y$ es $3n^2$.

$$\begin{aligned}\left(5n+3n^2\right)^3 &= (5n)^3+3\cdot(5n)^2\cdot 3n^2+3\cdot 5n\cdot\left(3n^2\right)^2+\left(3n^2\right)^3\\ &=125n^3+3\cdot 25n^2\cdot 3n^2+3\cdot 5n\cdot 9n^4+27n^6\\ &=125n^3+225n^4+135n^5+27n^6\end{aligned}$$

b) $\left(x^2y^4+2z\right)^3$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; para $x$ igual a $x^2y^4$, y para $y$ igual a $2z$.

$$\begin{aligned}\left(x^2y^4+2z\right)^3 &= \left(x^2y^4\right)^3+3\cdot\left(x^2y^4\right)^2\cdot 2z+3\cdot x^2y^4\cdot(2z)^2+(2z)^3\\ &=x^6y^{12}+3\cdot x^4y^8\cdot 2z+3\cdot x^2y^4\cdot 4z^2+8z^3\\ &=x^6y^{12}+6x^4y^8z+12x^2y^4z^2+8z^3\end{aligned}$$

c) $\left(\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2\right)^3$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ para $x$ igual a $\frac{1}{2}a^3$, y para $y$ igual a $\frac{3}{2}a^2$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a^2\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}a^3\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}a^3\right)^2\cdot\frac{3}{2}a^2+3\cdot\frac{1}{2}a^3\cdot\left(\frac{3}{2}a^2\right)^2+\left(\frac{3}{2}a^2\right)^3\\ &=\frac{1}{8}a^9+3\cdot\frac{1}{4}a^6\cdot\frac{3}{2}a^2+3\cdot\frac{1}{2}a^3\cdot\frac{9}{4}a^4+\frac{27}{8}a^6\\ &=\frac{1}{8}a^9+\frac{9}{8}a^8+\frac{27}{8}a^7+\frac{27}{8}a^6\end{aligned}$$

d) $\left(1+\dfrac{m^2x^2}{2}\right)^3$

Se utiliza la fórmula notable $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; para $x$ igual a $1$, y para $y$ igual a $\dfrac{m^2x^2}{2}$.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{m^2x^2}{2}\right)^3 &= 1^3+3\cdot 1^2\cdot\frac{m^2x^2}{2}+3\cdot 1\cdot\left(\frac{m^2x^2}{2}\right)^2+\left(\frac{m^2x^2}{2}\right)^3\\ &= 1+3\cdot 1\cdot\frac{m^2x^2}{2}+3\cdot 1\cdot\frac{m^4x^4}{4}+\frac{m^6x^6}{8}\\ &= 1+\frac{3m^2x^2}{2}+\frac{3m^4x^4}{4}+\frac{m^6x^6}{8}\end{aligned}$$

e) $\left(a^{x+1}+a^{2x-1}\right)^3$

Nuevamente se aplica la fórmula $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

$$\begin{aligned}\left(a^{x+1}+a^{2x-1}\right)^3 &= \left(a^{x+1}\right)^3+3\cdot\left(a^{x+1}\right)^2\cdot a^{2x-1}+3\cdot a^{x+1}\cdot\left(a^{2x-1}\right)^2+\left(a^{2x-1}\right)^3\\ &= a^{3(x+1)}+3\cdot a^{2(x+1)}\cdot a^{2x-1}+3\cdot a^{x+1}\cdot a^{2(2x-1)}+a^{3(2x-1)}\\ &= a^{3x+3}+3\cdot a^{2x+2}\cdot a^{2x-1}+3\cdot a^{x+1}\cdot a^{4x-2}+a^{6x-3}\\ &= a^{3x+3}+3a^{2x+2+2x-1}+3a^{x+1+4x-2}+a^{6x-3}\\ &= a^{3x+3}+3a^{4x+1}+3a^{5x-1}+a^{6x-3}\end{aligned}$$

**2.** Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\left(1+x^2y\right)^3-\left(2x+y\right)^3$

$$\begin{aligned}&= 1^3+3\cdot 1^2\cdot x^2y+3\cdot 1\cdot\left(x^2y\right)^2+\left(x^2y\right)^3-\left[(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2+y^3\right]\\ &= 1+3\cdot 1\cdot x^2y+3\cdot 1\cdot x^4y^2+x^6y^3-\left[8x^3+3\cdot 4x^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2+y^3\right]\\ &= 1+3x^2y+3x^4y^2+x^6y^3-\left[8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3\right]\\ &= 1+3x^2y+3x^4y^2+x^6y^3-8x^3-12x^2y-6xy^2-y^3\\ &= 1-9x^2y+3x^4y^2+x^6y^3-8x^3-6xy^2-y^3\end{aligned}$$

b) $(a+1)^3-\left[(1+a)^3-(1+b)^3\right]$

$$=a^3+3\cdot a^2\cdot 1+3\cdot a\cdot 1^2+1^3-\left[\left(1^3+3\cdot 1^2\cdot a+3\cdot 1\cdot a^2+a^3\right)-\left(1^3+3\cdot 1^2\cdot b+3\cdot 1\cdot b^2+b^3\right)\right]$$

$$=a^3+3a^2+3a+1-\left[\left(1+3a+3a^2+a^3\right)-\left(1+3b+3b^2+b^3\right)\right]$$

$$=a^3+3a^2+3a+1-\left[1+3a+3a^2+a^3-1-3b-3b^2-b^3\right]$$

$$=a^3+3a^2+3a+1-\left[3a+3a^2+a^3-3b-3b^2-b^3\right]$$

$$=a^3+3a^2+3a+1-3a-3a^2-a^3+3b+3b^2+b^3$$

$$=1+3b+3b^2+b^3$$

c) $\left(a^n+a^{n-1}\right)^3-2\left(a^{n-1}+a\right)^3$

$$=\left(a^n\right)^3+3\cdot\left(a^n\right)^2\cdot a^{n-1}+3\cdot a^n\cdot\left(a^{n-1}\right)^2+\left(a^{n-1}\right)^3-2\left[\left(a^{n-1}\right)^3+3\cdot\left(a^{n-1}\right)^2\cdot a+3\cdot a^{n-1}\cdot a^2+a^3\right]$$

$$=a^{3n}+3\cdot a^{2n}\cdot a^{n-1}+3\cdot a^n\cdot a^{2(n-1)}+a^{3(n-1)}-2\left[a^{3(n-1)}+3\cdot a^{2(n-1)}\cdot a+3\cdot a^{n-1}\cdot a^2+a^3\right]$$

$$=a^{3n}+3\cdot a^{2n}\cdot a^{n-1}+3\cdot a^n\cdot a^{2n-2}+a^{3n-3}-2\left[a^{3n-3}+3\cdot a^{2n-2}\cdot a+3\cdot a^{n-1}\cdot a^2+a^3\right]$$

$$=a^{3n}+3a^{2n+n-1}+3a^{n+2n-2}+a^{3n-3}-2\left[a^{3n-3}+3a^{2n-2+1}+3a^{n-1+2}+a^3\right]$$

$$=a^{3n}+3a^{3n-1}+3a^{3n-2}+a^{3n-3}-2\left[a^{3n-3}+3a^{2n-1}+3a^{n+1}+a^3\right]$$

$$=a^{3n}+3a^{3n-1}+3a^{3n-2}+a^{3n-3}-2a^{3n-3}-6a^{2n-1}-6a^{n+1}-2a^3$$

$$a^{3n}+3a^{3n-1}+3a^{3n-2}-a^{3n-3}-6a^{2n-1}-6a^{n+1}-2a^3$$