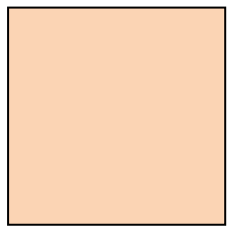
FÓRMULAS NOTABLES: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Ejemplos

1. Determinar la expresión algebraica que representa el área del cuadrado.



$\longleftarrow$ $2x+1$ $\longrightarrow$

Solución

Para determinar el área A de un cuadrado se eleva a la 2 la medida de su lado. En este caso la medida del lado corresponde a $2x+1$. Por lo tanto, se debe desarrollar la expresión $(2x+1)^2$.

$$A = (2x+1)^2$$

$$A = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2$$

$$A = 4x^2 + 4x + 1$$

El área del cuadrado se representa por $4x^2 + 4x + 1$.

2. Desarrollar $(6a+8b)^2$.

Solución

Se utiliza la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

El término x corresponde a $6a$, el término y a $8b$.

$$\begin{aligned}(6a+8b)^2 &= (6a)^2 + 2 \cdot 6a \cdot 8b + (8b)^2 \\ &= 36a^2 + 96ab + 64b^2\end{aligned}$$

3. Desarrollar $\left(4a^2+5b^3\right)^2$.

Solución

Se utiliza la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$; donde el término x corresponde a $4a^2$ y el término y corresponde a $5b^3$.

$$\begin{aligned}\left(4a^2+5b^3\right)^2 &= \left(4a^2\right)^2 + 2\cdot 4a^2\cdot 5b^3 + \left(5b^3\right)^2\\ &= 16a^4+40a^2b^3+25b^6\end{aligned}$$

Recuerde que:

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$$

4. Desarrollar $\left(\dfrac{2x}{y}+1\right)^2$.

Solución

Se utiliza la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$; donde el término x corresponde a $\dfrac{2x}{y}$ y el término y corresponde a 1.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x}{y}+1\right)^2 &= \left(\frac{2x}{y}\right)^2 + 2\cdot\frac{2x}{y}\cdot 1 + 1^2\\ &= \frac{4x^2}{y^2}+\frac{4x}{y}+1\end{aligned}$$

Recuerde que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ con } b\neq 0.$$

5. Desarrollar $\left(a^{2x}+b^{2x+1}\right)^2$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$; donde el término x corresponde a la expresión a^{2x} y el término y a la expresión b^{2x+1}.

$$\begin{aligned}\left(a^{2x}+b^{2x+1}\right)^2 &= \left(a^{2x}\right)^2 + 2\cdot a^{2x}\cdot b^{2x+1} + \left(b^{2x+1}\right)^2\\ &= a^{4x}+2a^{2x}b^{2x+1}+b^{4x+2}\end{aligned}$$

$$\left(b^{2x+1}\right)^2 = b^{2(2x+1)} = b^{4x+2}$$

6. Realice la operación indicada.

$$\left(\frac{1}{2}x^3 + x^2\right)^2 - \left(2x^2 + x^3\right)^2$$

Solución

Esta operación consta de la resta de 2 productos notables.

- Se desarrolla cada producto notable:

$$\left(\frac{1}{2}x^3 + x^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x^3\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^3 \cdot x^2 + \left(x^2\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}x^6 + x^5 + x^4$$

$$\left(2x^2 + x^3\right)^2 = \left(2x^2\right)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot x^3 + \left(x^3\right)^2$$
$$= 4x^4 + 4x^5 + x^6$$

- Se restan los resultados obtenidos:

$$\frac{1}{4}x^6 + x^5 + x^4 - \left(4x^4 + 4x^5 + x^6\right) = \boxed{\frac{1}{4}x^6} + \boxed{x^5} + \boxed{x^4} - \boxed{4x^4} - \boxed{4x^5} - \boxed{x^6}$$
$$= \frac{-3}{4}x^6 - 3x^5 - 3x^4$$

Observe que se reducen los términos semejantes.

Ejercicios

1. Desarrolle cada producto notable.

a) $(2x+y)^2$

b) $(5a^2b+1)^2$

c) $(3x^2+5y^4)^2$

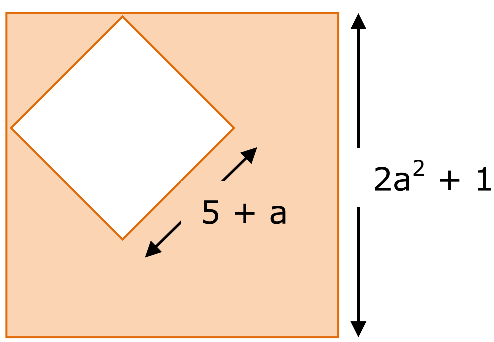
d) $(1+2a^3b)^2$

e) $\left(\dfrac{2x}{3}+x^2\right)^2$

f) $\left(\dfrac{1}{3}x^3y+3y\right)^2$

g) $(m^{3x-1}+m)^2$

2. Determine la expresión reducida correspondiente al área de la región sombreada en la siguiente figura formada por cuadrados:



3. Realizar las siguientes operaciones:

a) $(1+2x)^2-(x+2)^2+2(x+1)^2$

b) $a^2b(a^2+b)(a^2+b)-(ab+1)^2$

c) $a^{x+1}(a^x+1)^2-(a^{x+1}+1)-2(a^x+b^{x-1})^2$

Soluciones

1. Desarrolle cada producto notable.

a) $(2x+y)^2$

Se utiliza la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; donde el término x corresponde al monomio $2x$.

$$\begin{aligned}(2x+y)^2 &= (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot y + y^2\\ &= 4x^2 + 4xy + y^2\end{aligned}$$

b) $(5a^2b+1)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; donde el término x corresponde a $5a^2b$ y el término y es 1.

$$\begin{aligned}(5a^2b+1)^2 &= (5a^2b)^2 + 2\cdot 5a^2b\cdot 1 + 1^2\\ &= 25a^4b^2 + 10a^2b + 1\end{aligned}$$

c) $(3x^2+5y^4)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; donde el término x corresponde a $3x^2$ y el término y es $5y^4$.

$$\begin{aligned}(3x^2+5y^4)^2 &= (3x^2)^2 + 2\cdot 3x^2\cdot 5y^4 + (5y^4)^2\\ &= 9x^4 + 30x^2y^4 + 25y^8\end{aligned}$$

d) $(1+2a^3b)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; donde el término x corresponde a 1 y el término y es $2a^3b$.

$$\begin{aligned}(1+2a^3b)^2 &= 1^2 + 2\cdot 1\cdot 2a^3b + (2a^3b)^2\\ &= 1 + 4a^3b + 4a^6b^2\end{aligned}$$

e) $\left(\frac{2x}{3}+x^2\right)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; donde el término x corresponde a $\frac{2x}{3}$ y el término y es x^2.

$$\left(\frac{2x}{3}+x^2\right)^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 2\cdot\frac{2x}{3}\cdot x^2 + \left(x^2\right)^2$$
$$= \frac{4x^2}{9} + \frac{4}{3}x^3 + x^4$$

f) $\left(\frac{1}{3}x^3y + 3y\right)^2$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; donde el término x corresponde a $\frac{1}{3}x^3y$ y el término y es $3y$.

$$\left(\frac{1}{3}x^3y + 3y\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x^3y\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{3}x^3y\cdot 3y + (3y)^2$$
$$= \frac{1}{9}x^6y^2 + 2x^3y^2 + 9y^2$$

g) $\left(m^{3x-1}+m\right)^2$

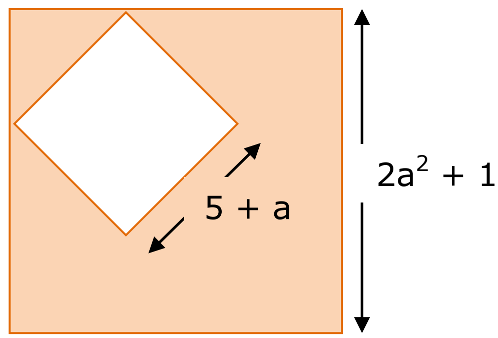
Se aplica la fórmula notable $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; donde el término x corresponde a m^{3x-1} y el término y es m.

$$\left(m^{3x-1}+m\right)^2 = \left(m^{3x-1}\right)^2 + 2\cdot \boxed{m^{3x-1}\cdot m} + m^2$$
$$= m^{2(3x-1)} + 2m^{3x-1+1} + m^2$$
$$= m^{6x-2} + 2m^{3x} + m^2$$

Recuerde que:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2. Para determinar la expresión correspondiente al área de la región sombreada de la figura se resta el área del cuadrado más pequeño del área del cuadrado más grande:



Área cuadrado grande – Área cuadrado pequeño

$$\left(2a^2+1\right)^2-\left(5+a\right)^2=\left[\left(2a^2\right)^2+2\cdot 2a^2\cdot 1+1^2\right]-\left(5^2+2\cdot 5\cdot a+a^2\right)$$

$$=4a^4+4a^2+1-\left(25+10a+a^2\right)$$

$$=4a^4+4a^2+1-25-10a-a^2$$

$$=4a^4+3a^2-10a-24$$

El área de la parte sombreada corresponde a $4a^4+3a^2-10a-24$.

3. Realizar las siguientes operaciones:

a) $\boxed{\left(1+2x\right)^2}-\boxed{\left(x+2\right)^2}+2\boxed{\left(x+1\right)^2}$

$$=\left[1^2+2\cdot 1\cdot 2x+\left(2x\right)^2\right]-\left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)+2\left(x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2\right)$$

$$=\left(1+4x+4x^2\right)-\left(x^2+4x+4\right)+2\left(x^2+2x+1\right)$$

$$=1+4x+4x^2-x^2-4x-4+2x^2+4x+2$$

$$=5x^2+4x-1$$

b) $a^2b\left(a^2+b\right)\left(a^2+b\right)-\left(ab+1\right)^2=$

$$=a^2b\left(a^2+b\right)^2-\left(ab+1\right)^2$$

$$=a^2b\left[\left(a^2\right)^2+2\cdot a^2\cdot b+b^2\right]-\left[\left(ab\right)^2+2\cdot ab\cdot 1+1^2\right]$$

$$= a^2b\left(a^4 + 2a^2b + b^2\right) - \left(a^2b^2 + 2ab + 1\right)$$
$$= a^6b + 2a^4b^2 + a^2b^3 - a^2b^2 - 2ab - 1$$

c) $a^{x+1}\left(a^x + 1\right)^2 - \left(a^{x+1} + 1\right) - 2\left(a^x + b^{x-1}\right)^2 =$

$$= a^{x+1}\left[\left(a^x\right)^2 + 2\cdot a^x\cdot 1 + 1^2\right] - \left(a^{x+1} + 1\right) - 2\left[\left(a^x\right)^2 + 2\cdot a^x\cdot b^{x-1} + \left(b^{x-1}\right)^2\right]$$
$$= a^{x+1}\left(a^{2x} + 2a^x + 1\right) - \left(a^{x+1} + 1\right) - 2\left(a^{2x} + 2a^xb^{x-1} + b^{2x-2}\right)$$
$$= a^{x+1+2x} + 2a^{x+1+x} + a^{x+1} - a^{x+1} - 1 - 2a^{2x} - 4a^xb^{x-1} - 2b^{2x-2}$$
$$= a^{3x+1} + 2a^{2x+1} + a^{x+1} - a^{x+1} - 1 - 2a^{2x} - 4a^xb^{x-1} - 2b^{2x-2}$$
$$= a^{3x+1} + 2a^{2x+1} - 1 - 2a^{2x} - 4a^xb^{x-1} - 2b^{2x-2}$$