FÓRMULAS NOTABLES: $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

Ejemplos

1. Realizar la multiplicación $(5a^2b+1)(5a^2b-1)$.

Solución
Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

El término x corresponde a $5a^2b$. El término y corresponde a 1.

$$\begin{aligned}(5a^2b+1)(5a^2b-1)&=\boxed{(5a^2b)^2}-1^2\\&=25a^4b^2-1\end{aligned}$$

Recuerde que:
$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ $\qquad (a^n)^m=a^{n\cdot m}$

2. Realizar la multiplicación $(-4+wy^2)(-4-wy^2)$.

Solución
Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

El término x corresponde a -4. El término y es wy^2.

$$\begin{aligned}(-4+wy^2)(-4-wy^2)&=(-4)^2-(wy^2)^2\\&=16-w^2y^4\end{aligned}$$

3. Realizar la multiplicación $\left(\frac{2}{7}-x^2y^3\right)\left(\frac{2}{7}+x^2y^3\right)$.

Solución
Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

El término x corresponde a $\frac{2}{7}$. El término y es x^2y^3.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{7}-x^2y^3\right)\left(\frac{2}{7}+x^2y^3\right)&=\left(\frac{2}{7}\right)^2-(x^2y^3)^2\\&=\frac{4}{49}-x^4y^6\end{aligned}$$

4. Realizar la multiplicación $\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{3}\right)$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

El término x corresponde a $2\sqrt{7}$. El término y es $3\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{3}\right) &= \left(2\sqrt{7}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2\\ &= 4\cdot 7-9\cdot 3\\ &= 28-27\\ &= 1\end{aligned}$$

5. Realizar la multiplicación $\left(a^x-b\right)\left(b+a^x\right)$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

El término x corresponde a a^x. El término y es b.

$$\begin{aligned}\left(a^x-b\right)\left(b+a^x\right) &= \left(a^x-b\right)\left(a^x+b\right)\\ &= \left(a^x\right)^2-b^2\\ &= a^{2x}-b^2\end{aligned}$$

6. Realizar la multiplicación $\left(2x^{2n-1}+x^{2n-3}\right)\left(2x^{2n-1}-x^{2n-3}\right)$.

Solución

Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

El término x corresponde a $2x^{2n-1}$. El término y es x^{2n-3}.

$$\begin{aligned}\left(2x^{2n-1}+x^{2n-3}\right)\left(2x^{2n-1}-x^{2n-3}\right) &= \left(2x^{2n-1}\right)^2-\left(x^{2n-3}\right)^2\\ &= 4x^{2(2n-1)}-x^{2(2n-3)}\\ &= 4x^{4n-2}-x^{4n-6}\end{aligned}$$

7. Realice la operación indicada.

$$\left(5x-3a^2\right)\left(5x+3a^2\right)-\left[(-2x+5a)(-2x-5a)\right]^2$$

Solución

- Se desarrolla cada término de la operación:

$$\begin{aligned}\left(5x-3a^2\right)\left(5x+3a^2\right) &= (5x)^2-\left(3a^2\right)^2\\ &= 25x^2-9a^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[(-2x+5a)(-2x-5a)\right]^2 &= \boxed{\left[(-2x)^2-(5a)^2\right]^2}\\ &= \left(4x^2-25a^2\right)^2\\ &= \left(4x^2\right)^2-2\cdot 4x^2\cdot 25a^2+\left(25a^2\right)^2\\ &= 16x^4-200x^2a^2+625a^4\end{aligned}$$

Recuerde que:
$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

- Se restan los resultados obtenidos:

$$\begin{aligned}25x^2-9a^4-\left(16x^4-200x^2a^2+625a^4\right) &= 25x^2-9a^4-16x^4+200x^2a^2-625a^4\\ &= 25x^2-634a^4-16x^4+200x^2a^2\end{aligned}$$

Note que se redujeron los términos semejantes.

Ejercicios

1. Realice cada multiplicación.

a) $\left(4n+3an^2\right)\left(4n-3an^2\right)$

b) $\left(5x^2y^4-3\right)\left(5x^2y^4+3\right)$

c) $\left(\frac{1}{4}m^3+\frac{1}{2}n^3\right)\left(\frac{1}{4}m^3-\frac{1}{2}n^3\right)$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a+a^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a-a^2\right)$

e) $\left(\frac{a^2b^2}{n}-2x^3\right)\left(\frac{a^2b^2}{n}+2x^3\right)$

f) $\left(m^{x+3}+m^{2x-1}\right)\left(m^{x+3}-m^{2x-1}\right)$

g) $\left(\sqrt{2}a^{x+1}-\sqrt{5}a^{5-x}\right)\left(\sqrt{2}a^{x+1}+\sqrt{5}a^{5-x}\right)$

2. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $(1-xy)(1+xy)-2(2x-y)(y+2x)$

b) $\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)-[(1-x)(x+1)]^2$

c) $\left(a^{n+1}-a^{n-1}\right)\left(a^{n+1}+a^{n-1}\right)-2\left(a^{n-1}+a^{2n}\right)\left(a^{n-1}-a^{2n}\right)$

Soluciones

1. Se presenta una manera de realizar cada multiplicación.

a) $\left(4n+3an^2\right)\left(4n-3an^2\right)$

Se utiliza la fórmula notable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

El término x corresponde a $4n$. El término y corresponde a $3an^2$.

$$\begin{aligned}\left(4n+3an^2\right)\left(4n-3an^2\right) &= (4n)^2-\left(3an^2\right)^2\\ &= 16n^2-9a^2n^4\end{aligned}$$

b) $\left(5x^2y^4-3\right)\left(5x^2y^4+3\right)$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

El término x corresponde a $5x^2y^4$. El término y corresponde a 3.

$$\begin{aligned}\left(5x^2y^4-3\right)\left(5x^2y^4+3\right) &= \left(5x^2y^4\right)^2-3^2\\ &= 25x^4y^8-9\end{aligned}$$

c) $\left(\frac{1}{4}m^3+\frac{1}{2}n^3\right)\left(\frac{1}{4}m^3-\frac{1}{2}n^3\right)$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

El término x corresponde a $\frac{1}{4}m^3$. El término y corresponde a $\frac{1}{2}n^3$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}m^3+\frac{1}{2}n^3\right)\left(\frac{1}{4}m^3-\frac{1}{2}n^3\right) &= \left(\frac{1}{4}m^3\right)^2-\left(\frac{1}{2}n^3\right)^2\\ &= \frac{1}{16}m^6-\frac{1}{4}n^6\end{aligned}$$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a+a^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a-a^2\right)$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.

El término x corresponde a $\frac{1}{\sqrt{2}}a$. El término y corresponde a a^2.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a + a^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a - a^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2 - \left(a^2\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}a^2 - a^4$$

e) $\left(\frac{a^2b^2}{n} - 2x^3\right)\left(\frac{a^2b^2}{n} + 2x^3\right)$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

El término x corresponde a $\frac{a^2b^2}{n}$. El término y corresponde a $2x^3$.

$$\left(\frac{a^2b^2}{n} - 2x^3\right)\left(\frac{a^2b^2}{n} + 2x^3\right) = \left(\frac{a^2b^2}{n}\right)^2 - \left(2x^3\right)^2$$
$$= \frac{a^4b^4}{n^2} - 4x^6$$

f) $\left(m^{x+3} + m^{2x-1}\right)\left(m^{x+3} - m^{2x-1}\right)$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

El término x corresponde a m^{x+3}. El término y corresponde a m^{2x-1}.

$$\left(m^{x+3} + m^{2x-1}\right)\left(m^{x+3} - m^{2x-1}\right) = \left(m^{x+3}\right)^2 - \left(m^{2x-1}\right)^2$$
$$= m^{2(x+3)} - m^{2(2x-1)}$$
$$= m^{2x+6} - m^{4x-2}$$

g) $\left(\sqrt{2}a^{x+1} - \sqrt{5}a^{5-x}\right)\left(\sqrt{2}a^{x+1} + \sqrt{5}a^{5-x}\right)$

Se aplica la fórmula notable $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

El término x corresponde a $\sqrt{2}a^{x+1}$. El término y corresponde a $\sqrt{5}a^{5-x}$.

$$\left(\sqrt{2}a^{x+1} - \sqrt{5}a^{5-x}\right)\left(\sqrt{2}a^{x+1} + \sqrt{5}a^{5-x}\right) = \left(\sqrt{2}a^{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{5}a^{5-x}\right)^2$$
$$= 2a^{2(x+1)} - 5a^{2(5-x)}$$
$$= 2a^{2x+2} - 5a^{10-2x}$$

2. Se muestra una forma de realizar las operaciones.

a) Una manera de trabajar el ejercicio es la siguiente:

$$\begin{aligned}(1-xy)(1+xy)-2(2x-y)(y+2x) &= 1^2-(xy)^2-2\left[(2x)^2-y^2\right]\\ &= 1-x^2y^2-2(4x^2-y^2)\\ &= 1-x^2y^2-8x^2+2y^2\end{aligned}$$

b) Una manera de trabajar el ejercicio es la siguiente:

$$\begin{aligned}(x^2+1)(x^2-1)-\left[(1-x)(x+1)\right]^2 &= (x^2)^2-1^2-(1^2-x^2)^2\\ &= x^4-1-(1-x^2)^2\\ &= x^4-1-(1-2x^2+x^4)\\ &= x^4-1-1+2x^2-x^4\\ &= 2x^2-2\end{aligned}$$

c) Una manera de trabajar el ejercicio es la siguiente:

$$\begin{aligned}&(a^{n+1}-a^{n-1})(a^{n+1}+a^{n-1})-2(a^{n-1}+a^{2n})(a^{n-1}-a^{2n})\\ &\quad= \left[(a^{n+1})^2-(a^{n-1})^2\right]-2\left[(a^{n-1})^2-(a^{2n})^2\right]\\ &\quad= a^{2(n+1)}-a^{2(n-1)}-2\left(a^{2(n-1)}-a^{4n}\right)\\ &\quad= a^{2n+2}-a^{2n-2}-2\left(a^{2n-2}-a^{4n}\right)\\ &\quad= a^{2n+2}-a^{2n-2}-2a^{2n-2}+2a^{4n}\end{aligned}$$