INECUACIONES FRACCIONARIAS

Ejemplos

1. Resuelva la inecuación $\dfrac{1-2x}{x+2} \leq -2$.

Solución

Inecuación	$\dfrac{1-2x}{x+2} \leq -2$
Se determina el dominio de la expresión algebraica.	El dominio de $\dfrac{1-2x}{x+2}$ es $\mathbb{R}-\{-2\}$.
Se reescribe la inecuación para que uno de los miembros sea 0.	$\dfrac{1-2x}{x+2}+2 \leq 0$
Se realizan las operaciones indicadas.	$\dfrac{1-2x}{x+2}+2 \leq 0$ $\dfrac{1-2x+2(x+2)}{x+2} \leq 0$ $\dfrac{1-2x+2x+4}{x+2} \leq 0$ $\dfrac{5}{x+2} \leq 0$
Se determinan los números que hacen 0 el numerador y el denominador.	El numerador es 5, por lo tanto, nunca será igual a 0. Además, la expresión es negativa solo cuando el denominador es negativo. Por lo tanto, se debe resolver la inecuación $x+2<0$; es decir $x<-2$.
Se escribe el conjunto solución.	$S=\left]-\infty,-2\right[$ Note que el número -2 no se incluye en el conjunto solución, pues hace 0 el denominador.

2. Resuelva la inecuación $\dfrac{2x+1}{x} \geq 1$.

Solución

<table>
<tr><td>Inecuación</td><td>$\dfrac{2x+1}{x} \geq 1$</td></tr>
<tr><td>Se determina el dominio de la expresión algebraica.</td><td>El dominio de $\dfrac{2x+1}{x}$ es $\mathbb{R}-\{0\}$.</td></tr>
<tr><td>Se reescribe la inecuación para que uno de los miembros sea 0.</td><td>$\dfrac{2x+1}{x} - 1 \geq 0$</td></tr>
<tr><td>Se realizan las operaciones indicadas.</td><td>$\dfrac{2x+1}{x} - 1 \geq 0$
$\dfrac{2x+1}{x} - \dfrac{x}{x} \geq 0$
$\dfrac{2x+1-x}{x} \geq 0$
$\dfrac{x+1}{x} \geq 0$</td></tr>
<tr><td>Se determinan los números que hacen 0 el numerador y el denominador.</td><td>$x+1=0$
$x=-1$
$x=0$</td></tr>
<tr><td>Se hace una tabla de signos para determinar la solución a la inecuación.</td><td>-1 0
<table>
<tr><td></td><td>$x<-1$</td><td>$-1<x<0$</td><td>$0<x$</td></tr>
<tr><td>$x+1$</td><td>$-$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$-$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{x+1}{x}$</td><td>$+$</td><td>$-$</td><td>$+$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Se escribe como conjunto solución la unión de los intervalos en los que se cumple la desigualdad, en este caso, cuando la expresión es positiva o 0.</td><td>$S = \left]-\infty,-1\right] \cup \left]0,+\infty\right[$
Note que el número 0 no se incluye en el conjunto solución, pues hace 0 el denominador.</td></tr>
</table>

3. Resuelva la inecuación $\frac{2}{x+1} > \frac{1}{x-1}$.

Solución

Inecuación	$\frac{2}{x+1} > \frac{1}{x-1}$
Se determina el dominio de cada expresión algebraica.	El dominio de $\frac{2}{x+1}$ es $\mathbb{R}-\{-1\}$. El dominio de $\frac{1}{x-1}$ es $\mathbb{R}-\{1\}$.
Se reescribe la inecuación para que uno de los miembros sea 0.	$\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} > 0$
Se realizan las operaciones indicadas.	$\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} > 0$ $\frac{2(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} > 0$ $\frac{2x-2-x-1}{(x+1)(x-1)} > 0$ $\frac{x-3}{(x+1)(x-1)} > 0$
Se determinan los números que hacen 0 el numerador y el denominador.	$x-3=0$, $x=3$ $x+1=0$, $x=-1$ $x-1=0$, $x=1$

Se hace una tabla de signos para determinar la solución a la inecuación.

-1 $\quad$ 1 $\quad$ 3

	$x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<3$	$3<x$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Se escribe como conjunto solución la unión de los intervalos en los que se cumple la desigualdad, en este caso, cuando la expresión es positiva.	$S =]-1,1[\cup]3,+\infty[$

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes inecuaciones fraccionarias:

a) $\dfrac{3x}{x+5} \leq 3$

b) $\dfrac{x+1}{2x-1} > -4$

c) $\dfrac{x}{x+1} < \dfrac{1}{x-2}$

Soluciones

1. Resuelva las siguientes inecuaciones fraccionarias:

a) $\dfrac{3x}{x+5} \le 3$

Inecuación	$\dfrac{3x}{x+5} \le 3$
Se determina el dominio de la expresión algebraica.	El dominio de $\dfrac{3x}{x+5}$ es $\mathbb{R} - \{-5\}$.
Se reescribe la inecuación para que uno de los miembros sea 0.	$\dfrac{3x}{x+5} - 3 \le 0$
Se realizan las operaciones indicadas.	$\dfrac{3x}{x+5} - 3 \le 0$ $\dfrac{3x}{x+5} - \dfrac{3(x+5)}{x+5} \le 0$ $\dfrac{3x - 3x - 15}{x+5} \le 0$ $\dfrac{-15}{x+5} \le 0$
Se determinan los números que hacen 0 el numerador y el denominador.	El numerador es -15, por lo tanto $\frac{-15}{x+5}$, nunca será igual a 0. Además, la expresión $\dfrac{-15}{x+5}$ es negativa solo cuando el denominador es positivo. Por lo tanto, se debe resolver la inecuación $x+5>0$; es decir $x > -5$.
Se escribe el conjunto solución.	$S = \left]-5, +\infty\right[$

b) $\dfrac{x+1}{2x-1} > -4$

<table>
<tr><td>Inecuación</td><td>$\dfrac{x+1}{2x-1} > -4$</td></tr>
<tr><td>Se determina el dominio de la expresión algebraica.</td><td>El dominio de $\dfrac{x+1}{2x-1}$ es $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.</td></tr>
<tr><td>Se reescribe la inecuación para que uno de los miembros sea 0.</td><td>$\dfrac{x+1}{2x-1} + 4 > 0$</td></tr>
<tr><td>Se realizan las operaciones indicadas.</td><td>$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2x-1} + 4 &> 0\\ \frac{x+1}{2x-1} + \frac{4(2x-1)}{2x-1} &> 0\end{aligned}$$ $$\begin{aligned}\frac{x+1+8x-4}{2x-1} &> 0\\ \frac{9x-3}{2x-1} &> 0\end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td>Se determinan los números que hacen 0 el numerador y el denominador.</td><td>$$\begin{aligned}9x-3 &= 0\\ 9x &= 3\\ x &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$ $$\begin{aligned}2x-1 &= 0\\ 2x &= 1\\ x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$</td></tr>
<tr><td>Se hace una tabla de signos para determinar la solución de la inecuación.</td><td>$\dfrac{1}{3}$ $\dfrac{1}{2}$
<table>
<tr><td></td><td>$x < \dfrac{1}{3}$</td><td>$\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{2}$</td><td>$\dfrac{1}{2} < x$</td></tr>
<tr><td>$9x-3$</td><td>–</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$2x-1$</td><td>–</td><td>–</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{9x-3}{2x-1}$</td><td>+</td><td>–</td><td>+</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Se escribe como conjunto solución la unión de los intervalos en los que se cumple la desigualdad, en este caso, cuando la expresión es positiva.</td><td>$S = \left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$</td></tr>
</table>

c) $\dfrac{x}{x+1} < \dfrac{1}{x-2}$

Inecuación	$\dfrac{x}{x+1} < \dfrac{1}{x-2}$
Se determina el dominio de cada expresión algebraica.	El dominio de $\dfrac{x}{x+1}$ es $\mathbb{R} - \{-1\}$. El dominio de $\dfrac{1}{x-2}$ es $\mathbb{R} - \{2\}$.
Se reescribe la inecuación para que uno de los miembros sea 0.	$\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x-2} < 0$
Se realizan las operaciones indicadas.	$\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x-2} < 0$ $\dfrac{x(x-2)-(x+1)}{(x+1)(x-2)} < 0$ $\dfrac{x^2 - 2x - x - 1}{(x+1)(x-2)} < 0$ $\dfrac{x^2 - 3x - 1}{(x+1)(x-2)} < 0$
Se determinan los números que hacen 0 el numerador y el denominador.	$x^2 - 3x - 1 = 0$ $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ $x + 1 = 0$ $x = -1$ $x - 2 = 0$ $x = 2$

Se hace una tabla de signos para determinar la solución de la inecuación.

$-1 \qquad \frac{3-\sqrt{13}}{2} \qquad 2 \qquad \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

	$x < -1$	$-1 < x < \frac{3-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{13}}{2} < x < 2$	$2 < x < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{13}}{2} < x$
$x - \frac{3-\sqrt{13}}{2}$	–	–	+	+	+
$x - \frac{3+\sqrt{13}}{2}$	–	–	–	–	+
$x+1$	–	+	+	+	+
$x-2$	–	–	–	+	+
$\frac{x^2-3x-1}{(x+1)(x-2)}$	+	–	+	–	+

Se escribe como conjunto solución la unión de los intervalos en los que se cumple la desigualdad, en este caso, cuando la expresión es negativa.	$S = \left]-1, \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]2, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right[$