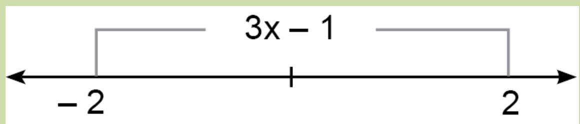
INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Ejemplos

1. Resuelva la inecuación $|3x-1|<2$.

Solución

Inecuación	$\lvert 3x-1\rvert<2$
Para que se cumpla que $\lvert 3x-1\rvert<2$ entonces $3x-1$ debe ser un número que está entre −2 y 2:	 $-2 < 3x - 1 < 2$
Se resuelve la inecuación resultante:	$-2<3x-1<2$ $-2+1<3x-1+1<2+1$ $-1<3x<3$ $\frac{-1}{3}<\frac{3x}{3}<\frac{3}{3}$ $\frac{-1}{3}<x<1$
Se escribe el conjunto solución.	$S=\left]\frac{-1}{3},1\right[$

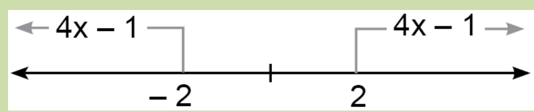
2. Resuelva la inecuación $|5x-2|+1\geq 1$.

Solución

Inecuación	$\|5x-2\|+1\geq 1$
Se despeja el valor absoluto:	$\|5x-2\|+1\geq 1$ $\|5x-2\|\geq 0$
Se resuelve la inecuación resultante.	Como el valor absoluto siempre es positivo o igual a 0, entonces el conjunto solución de la inecuación $\|5x-2\|\geq 0$ es $\mathbb{R}$.

3. Resuelva la inecuación $|4x-1|\geq 2$.

Solución

<table>
<tr><td>Inecuación</td><td colspan="2">$|4x-1|\geq 2$</td></tr>
<tr><td>Para que se cumpla que $|4x-1|\geq 2$ entonces $4x-1$ debe ser menor o igual que -2 o mayor o igual que 2:</td><td colspan="2">

$4x-1\leq -2$ $4x-1\geq 2$</td></tr>
<tr><td>Se resuelve las inecuaciones resultantes:</td><td>$4x-1\leq -2$
$4x\leq -2+1$
$4x\leq -1$
$x\leq \frac{-1}{4}$</td><td>$4x-1\geq 2$
$4x\geq 2+1$
$4x\geq 3$
$x\geq \frac{3}{4}$</td></tr>
<tr><td>Se escribe el conjunto solución que es la unión de los conjuntos solución de las inecuaciones anteriores.</td><td colspan="2">$S=\left]-\infty,\frac{-1}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$</td></tr>
</table>

4. Resuelva la inecuación $|x+1|-2|x-4|\ge 1$.

Solución

<table>
<tr><td>Inecuación</td><td>$|x+1|-2|x-4|\ge 1$</td></tr>
<tr><td>Se analiza el signo de cada expresión que está entre valor absoluto.</td><td>
<table>
<tr><td>$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$
$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$
$x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$</td><td>$x-4=0 \Leftrightarrow x=4$
$x-4>0 \Leftrightarrow x>4$
$x-4<0 \Leftrightarrow x<4$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Se elabora una tabla de signos para determinar las inecuaciones que deben resolverse:</td><td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td>-1</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>$x<-1$</td><td>$-1\le x\le 4$</td><td>$4<x$</td></tr>
<tr><td>$|x+1|$</td><td>$-x-1$</td><td>$x+1$</td><td>$x+1$</td></tr>
<tr><td>$|x-4|$</td><td>$-x+4$</td><td>$-x+4$</td><td>$x-4$</td></tr>
<tr><td>$|x+1|-2|x-4|\ge 1$</td><td>$-x-1-2(-x+4)\ge 1$</td><td>$x+1-2(-x+4)\ge 1$</td><td>$x+1-2(x-4)\ge 1$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Se resuelven las inecuaciones</td><td>
<table>
<tr><td>$-x-1-2(-x+4)\ge 1$
$-x-1+2x-8\ge 1$
$x-9\ge 1$
$x\ge 10$</td><td>$x+1-2(-x+4)\ge 1$
$x+1+2x-8\ge 1$
$3x-7\ge 1$
$3x\ge 8$
$x\ge \frac{8}{3}$</td><td>$x+1-2(x-4)\ge 1$
$x+1-2x+8\ge 1$
$-x+9\ge 1$
$-x\ge -8$
$x\le 8$</td></tr>
<tr><td>Ningún número real cumple las condiciones $x<-1$ y $x\ge 10$.</td><td>Los números que cumplen las condiciones $-1\le x\le 4$ y $x\ge \frac{8}{3}$ pertenecen a:
$\left[\frac{8}{3},4\right]$</td><td>Los números que cumplen las condiciones $4<x$ y $x\le 8$ pertenecen a:
$]4,8]$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Se escribe el conjunto solución que es la unión de los conjuntos solución de las inecuaciones anteriores.</td><td>$S=\left[\frac{8}{3},8\right]$</td></tr>
</table>

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|2x-5| \leq 4$

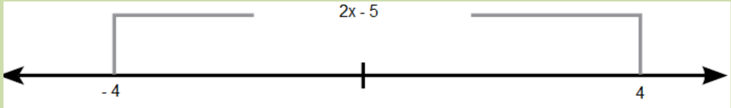
b) $|4x-3| > 5$

c) $1-|x+3| < |2-x|$

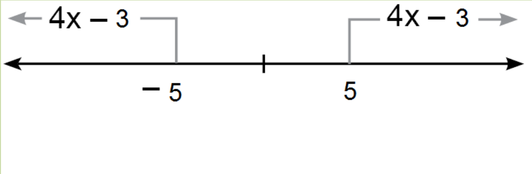
Soluciones

1. Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|2x-5| \leq 4$

Inecuación	$\|2x-5\| \leq 4$
Para que se cumpla que $\|2x-5\| \leq 4$ entonces $2x-5$ debe ser un número que está entre -4 y 4:	 $-4 \leq 2x-5 \leq 4$
Se resuelve la inecuación resultante:	$-4 \leq 2x-5 \leq 4$ $-4+5 \leq 2x-5+5 \leq 4+5$ $1 \leq 2x \leq 9$ $\frac{1}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{9}{2}$ $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$
Se escribe el conjunto solución.	$S = \left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$

b) $|4x-3|>5$

Inecuación	$\lvert 4x-3\rvert>5$	
Para que se cumpla que $\lvert 4x-3\rvert>5$ entonces $4x-3$ debe ser menor que -5 o mayor que 5:	 $4x-3<-5$	$4x-3>5$
Se resuelve las inecuaciones resultantes:	$4x-3<-5$ $4x<-5+3$ $4x<-2$ $x<\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$	$4x-3>5$ $4x>5+3$ $4x>8$ $x>\frac{8}{4}=2$
Se escribe el conjunto solución que es la unión de los conjuntos solución de las inecuaciones anteriores.	$S=\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right[\cup\left]2,+\infty\right[$	

c) $1-|x+3|<|2-x|$

Inecuación	$1-\lvert x+3\rvert<\lvert 2-x\rvert$
Se analiza el signo de cada expresión que está entre valor absoluto.	$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$ $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$ $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$ $2-x<0 \Leftrightarrow x>2$

Se elabora una tabla de signos para determinar las inecuaciones que deben resolverse:

	-3		2
	$x<-3$	$-3\le x\le 2$	$2<x$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert 2-x\rvert$	$2-x$	$2-x$	$x-2$
$1-\lvert x+3\rvert<\lvert 2-x\rvert$	$1-(-x-3)<2-x$	$1-(x+3)<2-x$	$1-(x+3)<x-2$

Se resuelven las inecuaciones:

$1-(-x-3)<2-x$ $1+x+3<2-x$ $x+4<2-x$ $2x<-2$ $x<-1$	$1-(x+3)<2-x$ $1-x-3<2-x$ $-x-2<2-x$ $-2<2$	$1-(x+3)<x-2$ $1-x-3<x-2$ $-x-2<x-2$ $-2x<0$ $x>0$
Los números que cumplen las condiciones $x<-3$ y $x<-1$ pertenecen a: $]-\infty,-3[$	Todos los números reales de $-3\le x\le 2$ cumplen la condición $-2<2$. $[-3,2]$	Los números que cumplen las condiciones $2<x$ y $x>0$ pertenecen a: $]2,+\infty[$

Se escribe el conjunto solución que es la unión de los conjuntos solución de las inecuaciones anteriores.	$S=\mathbb{R}$