INECUACIONES CUADRÁTICAS

Ejemplos

1. Resolver la inecuación $2x^2 \geq 5x + 3$.

Solución
Una forma de trabajar el ejercicio es la siguiente.

Se escribe la inecuación de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$.
$2x^2 - 5x - 3 \geq 0$

Se calcula el discriminante.
$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49$

Como el discriminante es positivo, el polinomio del miembro izquierdo es factorizable en el conjunto de los números reales, por lo que se factoriza.
$(2x+1)(x-3) \geq 0$

Una manera de determinar los intervalos que satisfacen la inecuación es elaborar una tabla de signos.

	$-\infty$ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ 3	3 $+\infty$
$(2x+1)$	−	+	+
$(x-3)$	−	−	+
	+	**−**	**+**

Como al evaluar el polinomio este sea igual a 0, entonces la variable puede tomar tanto el valor $\frac{-1}{2}$ como 3.

Por lo tanto, el conjunto solución es: $S = \left]-\infty, \frac{-1}{2}\right] \cup \left[3, +\infty\right[$.

2. Resolver la inecuación $1-9k^2>0$.

Solución

Note que la inecuación está escrita de la forma $ax^2+bx+c\geq 0$. Entonces, se calcula directamente el discriminante.

$\Delta=0^2-4\cdot 1\cdot -9=36$

Como el discriminante es positivo, el polinomio del miembro izquierdo es factorizable en el conjunto de los números reales, entonces se factoriza el polinomio.

$(1-3k)(1+3k)>0$

Se hace la tabla de signos para resolver la inecuación.

$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$(1+3k)$	−	+	+
$(1-3k)$	+	+	−
	−	**+**	−

Se escribe el conjunto solución.

$S=\left]\frac{-1}{3},\frac{1}{3}\right[$

3. Resolver la inecuación $4x^2+5<-x$.

Solución

Se escribe la inecuación de la forma $ax^2+bx+c<0$.

$4x^2+x+5<0$

Se calcula el discriminante.

$\Delta=1^2-4\cdot 4\cdot 5=-79$

Como el discriminante es negativo no se puede factorizar el polinomio en el conjunto de los números reales.

En este caso se determina el signo del polinomio evaluando para algún número real, por ejemplo 2.

$4\cdot 2^2+2+5=23$

Pero 23 no es menor que 0, entonces, como el signo de esta desigualdad no coincide con el de la inecuación, se tiene que la solución es el conjunto vacío.

Por lo tanto $S=\varnothing$.

4. Resolver la inecuación $25x^2 - 40x + 16 > 0$.

Solución
Se calcula el discriminante.

$$\Delta = (-40)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 16 = 0$$

Como el discriminante es 0, el polinomio del miembro izquierdo es factorizable en el conjunto de los números reales. Se factoriza el polinomio.

$$(5x - 4)^2 > 0$$

Un número elevado al cuadrado siempre es positivo o 0, pero se debe eliminar el caso en el que es igual a 0, es decir:

$$(5x - 4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

Por lo tanto, se tiene que $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{5}\right\}$.

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes inecuaciones cuadráticas.

a) $5x^2 + 3 \geq 3x^2 - 5$

b) $-3x^2 + 7x + 20 \leq 0$

c) $16x^2 + 8x + 1 < 0$

d) $x^2 + 3x > 0$

e) $9x^2 \leq 24x - 16$

f) $14 \leq -x^2 - 9x$

g) $25x^2 < -36$

h) $-x^2 + 7x + 8 < 0$

i) $12x \geq -4x^2 - 9$

j) $5x^2 + 19x \leq 4$

Soluciones

1. Se presenta una manera de realizar estos ejercicios.

a) Se escribe la inecuación de la forma $ax^2+bx+c\geq 0$.

$$5x^2+3-3x^2+5\geq 0$$
$$2x^2+8\geq 0$$
$$2\left(x^2+4\right)\geq 0$$

Se calcula el discriminante.

$\Delta = 0^2-4\cdot 1\cdot 4=-16$

Como el discriminante es negativo no se puede factorizar el polinomio en el conjunto de los números reales.

En este caso se determina el signo del polinomio evaluando para algún número real, por ejemplo 1.

$2\left(1^2+4\right)=10$

Se tiene que 10 es mayor que 0, entonces, como el signo de esta desigualdad coincide con el de la inecuación, se tiene que la solución es el conjunto de los números reales.

Por lo tanto, $S=\mathbb{R}$.

b) Se calcula el discriminante.

$\Delta = 7^2-4\cdot -3\cdot 20=289$

Como el discriminante es positivo se factoriza el polinomio.

$(5+3x)(4-x)\leq 0$

Se hace la tabla de signos para resolver la inecuación.

	$-\infty$ $\quad$ $-3/5$	$-3/5$ $\quad$ 4	4 $\quad$ $+\infty$
$(5+3x)$	−	+	+
$(4-x)$	+	+	−
	−	+	−

Se escribe el conjunto solución.

$$S=\left]-\infty,\frac{-3}{5}\right]\cup\left[4,+\infty\right[$$

c) Se calcula el discriminante.

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 0$

Como el discriminante es 0 se factoriza el polinomio.

$(4x+1)^2 < 0$

Un número elevado al cuadrado siempre es positivo o 0, por lo que esta inecuación no tiene solución.

Por lo tanto, se tiene que $S = \varnothing$.

d) Este polinomio se puede factorizar usando el método de factor común.

$x(x+3) > 0$

Se hace la tabla de signos para resolver la inecuación.

	$-\infty$ -3	-3 0	0 $+\infty$
$(x+3)$	−	+	+
x	−	−	+
	+	−	**+**

Se escribe el conjunto solución.

$S = \left]-\infty, -3\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

e) Se escribe la inecuación de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$.

$9x^2 - 24x + 16 \leq 0$

Se calcula el discriminante.

$\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16 = 0$

Como el discriminante es 0 se factoriza el polinomio.

$(3x-4)^2 \leq 0$

Un número elevado al cuadrado siempre es positivo o 0, entonces en este caso no puede ser negativo y únicamente se considera el caso cuando es igual a 0, es decir:

$(3x-4)^2 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto, se tiene que $S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$.

f) Se escribe la inecuación de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$.

$x^2 + 9x + 14 \leq 0$

Se calcula el discriminante.

$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 25$

Como el discriminante es positivo es posible factorizar el polinomio de la izquierda en el conjunto de los números reales.

$(x+2)(x+7) \leq 0$

Se hace la tabla de signos para resolver la inecuación.

	$-\infty$ -7	-7 -2	-2 $+\infty$
$(x+7)$	−	+	+
$(x+2)$	−	−	+
	+	−	+

Se escribe el conjunto solución.

$S = [-7, -2]$

g) Se escribe la inecuación de la forma $ax^2 + bx + c < 0$.

$25x^2 + 36 < 0$

Se calcula el discriminante.

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 25 \cdot 36 = -3\,600$

Como el discriminante es negativo no se puede factorizar el polinomio en el conjunto de los números reales.

En este caso se determina el signo del polinomio evaluando para algún número real, por ejemplo 1.

$25 \cdot 1^2 + 36 = 61$

Se tiene que 61 es mayor que 0, entonces, como el signo de esta desigualdad no coincide con el de la inecuación, se tiene que la solución es el conjunto vacío.

Por lo tanto. $S = \varnothing$.

h) Se calcula el discriminante.

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot -1 \cdot 8 = 81$

Como el discriminante es positivo se factoriza el polinomio.

$(8 - x)(x + 1) < 0$

Se hace la tabla de signos para resolver la inecuación.

	$-\infty$ -1	-1 8	8 $+\infty$
$(x+1)$	−	+	+
$(8-x)$	+	+	−
	−	+	−

Se escribe el conjunto solución.

$S = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]8, +\infty\right[$

i) Se escribe la inecuación de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$.

$4x^2 + 12x + 9 \geq 0$

Se calcula el discriminante.

$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$

Como el discriminante es 0 se factoriza el polinomio en el conjunto de los números reales.

$(2x + 3)^2 \geq 0$

Un número elevado al cuadrado siempre es positivo o 0, entonces la solución es el conjunto de números reales.

Por lo tanto, se tiene que $S = \mathbb{R}$.

j) Se escribe la inecuación de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$.

$5x^2 + 19x - 4 \leq 0$

Se calcula el discriminante.

$\Delta = 19^2 - 4 \cdot 5 \cdot -4 = 441$

Como el discriminante es positivo se factoriza el polinomio en el conjunto de los números reales.

$(x + 4)(5x - 1) \leq 0$

Se hace la tabla de signos para resolver la inecuación.

$-\infty \qquad -4 \qquad \frac{1}{5} \qquad +\infty$

$(x+4)$	−	+	+
$(5x-1)$	−	−	+
	+	−	+

Se escribe el conjunto solución.

$$S = \left[-4, \frac{1}{5}\right]$$