FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS CUADRÁTICOS

Ejemplos

1. Determine cuáles de las siguientes expresiones no son facotrizables en el conjunto de los números reales.

a) $3x^2 - 8x - 3$

b) $25y^2 + 9 - 30y$

c) $m - 3m^2 - 1$

Solución

a) Se identifican los coeficientes numéricos para calcular el discriminante.

$a = 3$

$b = -8$

$c = -3$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$

La expresión es factorizable en el conjunto de números reales porque el discriminante es mayor que 0.

b) Se identifican los coeficientes numéricos para calcular el discriminante.

$a = 25$

$b = -30$

$c = 9$

$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0$

La expresión es factorizable en el conjunto de números reales porque el discriminante es igual a 0.

c) Se identifican los coeficientes numéricos para calcular el discriminante.

$a = -3$

$b = 1$

$c = -1$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot -3 \cdot -1 = -11$

La expresión no es factorizable en el conjunto de números reales porque el discriminante es menor que 0.

2. Encuentre la factorización en el conjunto de los números reales del polinomio $4x^2 - 8x - 5$ y compruebe que se obtiene el mismo resultado usando tres métodos diferentes.

Solución

Este ejercicio se puede trabajar con diferentes métodos, se muestran tres maneras de efectuarlo.

2.1 Método de completar cuadrados

Se reescribe la expresión considerando que $4 - 9 = -5$. Es decir, de la manera $\color{blue}{4x^2 - 8x + 4} - 9$.

Los tres primeros términos se pueden factorizar por medio de la segunda fórmula notable de la siguiente manera: $\color{blue}{(2x-2)^2} - 9$.

Ahora se factoriza usando el método de diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned}\left[(2x-2)+3\right]\left[(2x-2)-3\right] &= (2x-2+3)(2x-2-3)\\ &= (2x+1)(2x-5)\end{aligned}$$

2.2 Método de inspección

Se busca que $\color{red}{4}x^2 \color{blue}{-8}x \color{green}{-5} = \color{red}{df}x^2 + \color{blue}{(dg+ef)}x + \color{green}{eg}$. Para lograrlo se tienen los siguientes valores:

d = 2	e = 1
f = 2	g = –5

Puede comprobarse que:

$$df = 2\cdot 2 = 4 \qquad dg + ef = 2\cdot -5 + 1\cdot 2 = -8 \qquad eg = 1\cdot -5 = -5$$

Ahora se factoriza la expresión y se obtiene el siguiente producto: $(2x+1)(2x-5)$.

2.3 Método de fórmula general

Se identifican los coeficientes numéricos para calcular el discriminante.

$a = 4$

$b = -8$

$c = -5$

$\Delta = (-8)^2 - 4\cdot 4\cdot -5 = 144$

Ahora se calcula cada una de las raíces o ceros del polinomio.

$$x_1 = \frac{8+\sqrt{144}}{8} = \frac{8+12}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{8-\sqrt{144}}{8} = \frac{8-12}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

Ahora se factoriza usando el *Teorema del factor*.

$$4\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2\left(x-\frac{5}{2}\right)\cdot 2\left(x+\frac{1}{2}\right) = (2x-5)(2x+1)$$

3. Factorice completamente la expresión $6x^2 - 11x + 3$ usando el método de inspección.

Solución

Se busca que $6x^2 - 11x + 3 = dfx^2 + (dg+ef)x + eg$. Para lograrlo se tienen los siguientes valores:

d = 3	e = –1
f = 2	g = –3

Puede comprobarse que:

$$\begin{aligned} df &= 3\cdot 2 \\ &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dg+ef &= 3\cdot -3 + -1\cdot 2 \\ &= -11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} eg &= -1\cdot -3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ahora se factoriza la expresión y se obtiene el siguiente producto $(3x-1)(2x-3)$.

4. Factorice completando cuadrados la expresión $25k^2+10k-3$.

Solución

Se reescribe la expresión considerando que $1-4=-3$.

$25k^2+10k+1-4$

Los tres primeros términos se pueden factorizar por medio de la primera fórmula notable de la siguiente manera: $(5k+1)^2-4$.

Ahora se factoriza usando el método de diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned} \left[(5k+1)+2\right]\left[(5k+1)-2\right] &= (5k+1+2)(5k+1-2) \\ &= (5k+3)(5k-1) \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Determine cuáles de los siguientes polinomios no son factorizables en el conjunto de los números reales.

a) $3m + 5m^2 - 1$

b) $25 + 4k^2 + 20k$

c) $3t^2 - 2t + 5$

d) $6y^2 - 2y - 3$

2. Factorice por el método de completar cuadrados.

a) $x^2 + 6x + 8$

b) $16y^2 + 40y + 21$

3. Factorice por el método de inspección.

a) $4x^2 - 3x - 7$

b) $8a^2 - 14a - 15$

4. Factorice utilizando la fórmula general.

a) $-5m^2 + 16m - 3$

b) $11x^2 + 12x + 1$

Soluciones

1. Determine cuáles de los siguientes polinomios no son factorizables en el conjunto de los números reales.

a) Se identifican los coeficientes numéricos para calcular el discriminante.

$a = 5$

$b = 3$

$c = -1$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot -1 = 29$

La expresión es factorizable en el conjunto de números reales porque el discriminante es mayor que 0.

b) Se identifican los coeficientes numéricos para calcular el discriminante.

$a = 4$

$b = 20$

$c = 25$

$\Delta = 20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0$

La expresión es factorizable en el conjunto de números reales porque el discriminante es igual a 0.

c) Se identifican los coeficientes numéricos para calcular el discriminante.

$a = 3$

$b = -2$

$c = 5$

$\Delta = \left(-2\right)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -56$

La expresión no es factorizable en el conjunto de números reales porque el discriminante es menor que 0.

d) Se identifican los coeficientes numéricos para calcular el discriminante.

$$a = 6$$
$$b = -2$$
$$c = -3$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 6 \cdot -3 = 76$$

La expresión es factorizable en el conjunto de números reales porque el discriminante es mayor que 0.

2. Factorice por el método de completar cuadrados.

a) Se reescribe la expresión considerando que $9 - 1 = 8$.

$$x^2 + 6x + 9 - 1$$

Los tres primeros términos se pueden factorizar por medio de la primera fórmula notable de la siguiente manera: $(x+3)^2 - 4$.

Ahora se factoriza usando el método de diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned}\left[(x+3)+1\right]\left[(x+3)-1\right] &= (x+3+1)(x+3-1)\\ &= (x+4)(x+2)\end{aligned}$$

b) Se reescribe la expresión considerando que $25 - 4 = 21$.

$$16y^2 + 40y + 25 - 4$$

Los tres primeros términos se pueden factorizar por medio de la primera fórmula notable de la siguiente manera: $(4y+5)^2 - 4$.

Ahora se factoriza usando el método de diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned}\left[(4y+5)+2\right]\left[(4y+5)-2\right] &= (4y+5+2)(4y+5-2)\\ &= (4y+7)(4y+3)\end{aligned}$$

3. Factorice por el método de inspección.

a) Se busca que $4x^2 - 3x - 7 = dfx^2 + (dg + ef)x + eg$. Para lograrlo se tienen los siguientes valores:

d = 4	e = –7
f = 1	g = 1

Puede comprobarse que:

$df = 4 \cdot 1 = 4$ $\quad dg + ef = 4 \cdot 1 + -7 \cdot 1 = -3$ $\quad eg = -7 \cdot 1 = -7$

Ahora se factoriza la expresión y se obtiene $(4x - 7)(x + 1)$.

b) Se busca que $8a^2 - 14a - 15 = dfx^2 + (dg + ef)x + eg$

Para lograrlo se tienen los siguientes valores:

d = 2	e = –5
f = 4	g = 3

Puede comprobarse que:

$df = 2 \cdot 4 = 8$ $\quad dg + ef = 2 \cdot 3 + -5 \cdot 4 = -14$ $\quad eg = -5 \cdot 3 = -15$

Ahora se factoriza la expresión y se obtiene $(2a - 5)(4a + 3)$.

4. Factorice utilizando la fórmula general.

a) Se identifican los coeficientes numéricos para calcular el discriminante.

$a = -5$

$b = 16$

$c = -3$

$\Delta = 16^2 - 4 \cdot -5 \cdot -3 = 196$

Ahora se calcula cada una de las raíces o ceros del polinomio.

$$m_1 = \frac{-16+\sqrt{196}}{-10} = \frac{-16+14}{-10} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$$

$$m_2 = \frac{-16-\sqrt{196}}{-10} = \frac{-16-14}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3$$

Ahora se factoriza y se tiene $-5\left(m-\frac{1}{5}\right)(m-3) = (-5m+1)(m-3)$.

b) Se identifican los coeficientes numéricos para calcular el discriminante.

$a = 11$

$b = 12$

$c = 1$

$\Delta = 12^2 - 4\cdot 11\cdot 1 = 100$

Ahora se calcula cada una de las raíces o ceros del polinomio.

$$x_1 = \frac{-12+\sqrt{100}}{22} = \frac{-12+10}{22} = \frac{-2}{22} = \frac{-1}{11}$$

$$x_2 = \frac{-12-\sqrt{100}}{22} = \frac{-12-10}{22} = \frac{-22}{22} = -1$$

Ahora se factoriza y se obtiene $11\left(x+\frac{1}{11}\right)(x+1) = (11x+1)(x+1)$.