FACTORIZACIÓN POR SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

Ejemplos

1. Factorice completamente el polinomio $125k^6 - 27m^9$.

Solución

Se calcula la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{125k^6} = \sqrt[3]{5^3k^6} = 5k^2$$

$$\sqrt[3]{27m^9} = \sqrt[3]{3^3m^9} = 3m^3$$

La factorización completa del polinomio se encuentra utilizando la fórmula de diferencia de cubos.

$$\left(5k^2 - 3m^3\right)\left(\left(5k^2\right)^2 + 5k^2 \cdot 3m^3 + \left(3m^3\right)^2\right)$$

$$= \left(5k^2 - 3m^3\right)\left(25k^4 + 15k^2m^3 + 9m^6\right)$$

2. Factorice completamente el polinomio $64x^6 + 1$.

Solución

Se calcula la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{64x^6} = \sqrt[3]{2^6x^6} = 2^2x^2 = 4x^2$$

$$\sqrt[3]{1} = 1$$

La factorización completa del polinomio se encuentra utilizando la fórmula de suma de cubos.

$$\left(4x^2 + 1\right)\left(\left(4x^2\right)^2 - 4x^2 \cdot 1 + 1^2\right)$$

$$= \left(4x^2 + 1\right)\left(16x^4 - 4x^2 + 1\right)$$

3. Factorice completamente la expresión $(k-2)^3 - 8$.

Solución

Se calcula la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{(k-2)^3} = (k-2)$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

Ahora se aplica la fórmula de diferencia de cubos.

$$\left((k-2)-2\right)\left((k-2)^2 + (k-2)\cdot 2 + 2^2\right)$$

Posteriormente se simplifican los factores y se obtiene la factorización completa.

$$(k-2-2)\left(k^2 \underline{-4k} \cancel{+4} \underline{+2k} \cancel{-4} + 4\right)$$

$$= (k-4)\left(k^2 - 2k + 4\right)$$

4. Factorice completamente la expresión $54 + 16(a+1)^3$.

Solución

Primero se puede factorizar utilizando el método de factor común.

$$2\left[27 + 8(a+1)^3\right]$$

Ahora se calculan las raíces cúbicas de cada uno de los términos del dentro del paréntesis.

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$\sqrt[3]{8(a+1)^3} = \sqrt[3]{2^3(a+1)^3} = 2(a+1)$$

Se aplica la fórmula de suma de cubos.

$$2\left[3 + 2(a+1)\right]\left[3^2 - 3\cdot 2(a+1) + \left(2(a+1)\right)^2\right]$$

Posteriormente se simplifican los factores y así se obtiene la factorización completa.

$$2\left[3+2a+2\right]\left[9-6\left(a+1\right)+4\left(a^2+2a+1\right)\right]$$

$$=2\left[3+2a+2\right]\left[9-6a-6+4a^2+8a+4\right]$$

$$=2\left(5+2a\right)\left(4a^2+2a+7\right)$$

Suma y diferencia de cubos

Ejercicios

1. Factorice completamente cada una de las siguientes expresiones.

a) a^3m^3+64

b) $343-k^6$

c) $375x^3+648y^3$

d) $-27k^9-8y^3k^3$

e) $1\,331-(k-11)^3$

f) $(a+b)^3+b^3$

g) $8(x-y)^3-27(x+y)^3$

h) $2197+\sqrt[4]{k^{36}}$

Soluciones

1. A continuación se muestra una forma de realizar las factorizaciones propuestas.

a) Se calcula la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{a^3m^3} = am$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$$

Se aplica la fórmula de suma de cubos para obtener la factorización completa $(am+4)\left((am)^2 - am\cdot 4 + 4^2\right) = (am+4)\left(a^2m^2 - 4am + 16\right)$.

b) Se calcula la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$$

$$\sqrt[3]{k^6} = k^2$$

Se aplica la fórmula de diferencia de cubos para obtener la factorización completa $(7-k^2)\left(7^2 + 7k^2 + (k^2)^2\right) = (7-k^2)\left(49 + 7k^2 + k^4\right)$.

c) Primero se factoriza usando el método de factor común.

$$3\left(125x^3 + 216y^3\right)$$

Ahora se calcula la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{125x^3} = \sqrt[3]{5^3x^3} = 5x$$

$$\sqrt[3]{216y^3} = \sqrt[3]{6^3y^3} = 6y$$

Se aplica la fórmula de suma de cubos para encontrar la factorización completa

$$3(5x+6y)\left((5x)^2 - 5x\cdot 6y + (6y)^2\right) = 3(5x+6y)\left(25x^2 - 30xy + 36y^2\right).$$

d) Primero se factoriza usando el método de factor común.

$$-k^3\left(27k^6+8y^3\right)$$

Ahora se calculan las raíces cúbicas de cada uno de los términos del binomio que está dentro del paréntesis.

$$\sqrt[3]{27k^6}=\sqrt[3]{3^3k^6}=3k^2$$

$$\sqrt[3]{8y^3}=\sqrt[3]{2^3y^3}=2y$$

Finalmente se aplica la fórmula de suma de cubos para obtener la factorización completa.

$$-k^3\left(3k^2+2y\right)\left(\left(3k^2\right)^2-3k^2\cdot 2y+\left(2y\right)^2\right)=-k^3\left(3k^2+2y\right)\left(9k^4-6k^2y+4y^2\right)$$

e) Se calculan las raíces cúbicas de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{1331}=\sqrt[3]{11^3}=11$$

$$\sqrt[3]{\left(k-11\right)^3}=\left(k-11\right)$$

Ahora se aplica la fórmula de diferencia de cubos.

$$\left[11-\left(k-11\right)\right]\left[11^2+11\cdot\left(k-11\right)+\left(k-11\right)^2\right]$$

Finalmente se simplifica cada uno de los factores para obtener la factorización completa.

$$\left(11-k+11\right)\left(121+11k-121+k^2-22k+121\right)=\left(22-k\right)\left(k^2-11k+121\right)$$

f) Se calcula la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{\left(a+b\right)^3}=\left(a+b\right)$$

$$\sqrt[3]{b^3}=b$$

Se aplica la fórmula de suma de cubos.

$$\left[(a+b)+b\right]\left[(a+b)^2-(a+b)\cdot b+b^2\right]$$

Finalmente se simplifican ambos factores para obtener las factorización completa.

$$(a+b+b)\left(a^2+2ab+b^2-ab-b^2+b^2\right)=(a+2b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

g) Se calcula la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$$\sqrt[3]{8(x-y)^3}=\sqrt[3]{2^3(x-y)^3}=2(x-y)$$

$$\sqrt[3]{27(x+y)^3}=\sqrt[3]{3^3(x+y)^3}=3(x+y)$$

Se aplica la fórmula de diferencia de cubos.

$$\left[2(x-y)-3(x+y)\right]\left[(2(x-y))^2+2(x-y)\cdot 3(x+y)+(3(x+y))^2\right]$$

Ahora se simplifica cada uno de los factores para obtener la factorización completa.

$$\begin{aligned}&\left[2x-2y-3x-3y\right]\left[4(x-y)^2+6(x-y)\cdot(x+y)+9(x+y)^2\right]\\&=(-x-5y)\left(4\left(x^2-2xy+y^2\right)+6\left(x^2-y^2\right)+9\left(x^2+2xy+y^2\right)\right)\\&=(-x-5y)\left(4x^2-8xy+4y^2+6x^2-6y^2+9x^2+18xy+9y^2\right)\\&=(-x-5y)\left(19x^2+10xy+7y^2\right)\end{aligned}$$

h) Primero se extraen factores del subradical en el segundo término.

$$\sqrt[4]{k^{36}}=k^9$$

Ahora se tiene la siguiente expresión: $2\,197+k^9$.

Se calcula la raíz cúbica de cada uno de los términos.

$\sqrt[3]{2197} = \sqrt[3]{13^3} = 13$

$\sqrt[3]{k^9} = k^3$

Se aplica la fórmula de suma de cubos para obtener la factorización completa $\left(13+k^3\right)\left(13^2 - 13k^3 + \left(k^3\right)^2\right) = \left(13+k^3\right)\left(169 - 13k^3 + k^6\right)$.