FACTORIZACIÓN USANDO DIVISIÓN SINTÉTICA

Ejemplos

1. Factorice completamente el polinomio $x^3 - 3x - 2$.

Solución

Como el término constante del polinomio es -2 y su coeficiente principal es 1, los posibles ceros son: $1, -1, 2, -2$.

Ahora se busca uno de los ceros.

Si $x = -1$

$\Rightarrow (-1)^3 - 3 \cdot -1 - 2 = 0$

Por lo tanto $x = -1$ es un cero del polinomio y $(x+1)$ es uno de sus factores.

Ahora se procede a realizar la operación $(x^3 - 3x - 2) \div (x+1)$.

El polinomio está ordenado en forma descendente según la variable x.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio, y como no hay término de grado 2 se agrega un 0 en el lugar correspondiente para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & -2 & \\ & -1 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 3 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 2.

$(x^2 - x - 2)(x+1)$

El primer factor es un trinomio cuadrático con discriminante positivo $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot -2 = 9$, el cual se puede factorizar por división sintética o con cualquiera de los métodos de completar cuadrados, fórmula general o inspección, de donde se obtiene la factorización completa del polinomio.

$$(x-2)(x+1)(x+1) = (x-2)(x+1)^2$$

2. Encuentre todos los posibles ceros del polinomio $-13m - 6 + 2m^3 - m^2$ y luego factorice completamente.

Solución

Primero se ordena el polinomio en forma descendente de acuerdo a la variable m de donde se obtiene $2m^3 - m^2 - 13m - 6$.

Como el término constante del polinomio es -6 y su coeficiente principal es 2, los posibles ceros se pueden encontrar de dos formas:

- ✓ Los divisores del término constante: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.
- ✓ Los divisores del término constante divididos por los divisores del coeficiente del término principal.

$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{-1} = -1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$
$\frac{-1}{1} = -1$	$\frac{-1}{-1} = 1$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{2}{-1} = -2$	$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{2}{-2} = -1$
$\frac{-2}{1} = -2$	$\frac{-2}{-1} = 2$	$\frac{-2}{2} = -1$	$\frac{-2}{-2} = 1$
$\frac{3}{1} = 3$	$\frac{3}{-1} = -3$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{-2} = \frac{-3}{2}$
$\frac{-3}{1} = -3$	$\frac{-3}{-1} = 3$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$
$\frac{6}{1} = 6$	$\frac{6}{-1} = -6$	$\frac{6}{2} = 3$	$\frac{6}{-2} = -3$
$\frac{-6}{1} = -6$	$\frac{-6}{-1} = 6$	$\frac{-6}{2} = -3$	$\frac{-6}{-2} = 3$

Por lo tanto todos los posibles ceros del polinomio son los elementos del conjunto $\left\{-6, -3, -2, \frac{-3}{2}, -1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 6\right\}$

Ahora se busca uno de los ceros.
Si $m = 3$
$\Rightarrow 2 \cdot 3^3 - 3^2 - 13 \cdot 3 - 6 = 0$

Por lo tanto, $m = 3$ es un cero del polinomio y $(m-3)$ es uno de sus factores.

Ahora se procede a realizar la operación $\left(2m^3 - m^2 - 13m - 6\right) \div (m-3)$.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio que ya está ordenado para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -1 & -13 & -6 & 3 \\ & 6 & 15 & 6 & \\ \hline 2 & 5 & 2 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 3 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 2.

$\left(2m^2 + 5m + 2\right)(m-3)$

El primer factor es un trinomio cuadrático con discriminante positivo $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$, el cual se puede factorizar por división sintética o con cualquiera de los métodos de completar cuadrados, fórmula general o inspección, de donde se obtiene la factorización completa del polinomio: $(2m+1)(m+2)(m-3)$.

3. Factorice completamente el polinomio $x^4 - 13x^2 + 36$.

Solución

Como el término constante del polinomio es 36 y su coeficiente principal es 1, los posibles ceros son:
$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 9, -9, 12, -12, 18, -18, 36, -36.$

Ahora se busca uno de los ceros.

Si $x = 2$

$\Rightarrow 2^4 - 6 \cdot 2^2 + 8 = 0$

Por lo tanto, $x = 2$ es un cero del polinomio y $(x - 2)$ es uno de sus factores.

Ahora se procede a realizar la operación $\left(x^4 - 13x^2 + 36\right) \div (x - 2)$. Note que el polinomio está ordenado en forma descendente según la variable x.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio, y como no hay términos de grado 3 y de grado 1 se agrega un 0 en el lugar correspondiente para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -13 & 0 & 36 & \\ & 2 & 4 & -18 & -36 & 2 \\ \hline 1 & 2 & -9 & -18 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 4 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 3.

$\left(x^3 + 2x^2 - 9x - 18\right)(x - 2)$

El primer factor es un polinomio de grado 3 que se puede factorizar usando nuevamente el método de división sintética.

Como el término constante del polinomio es -18 y su coeficiente principal es 1, los posibles ceros son: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18$.

Ahora se busca uno de los ceros.

Si $x = -2$

$\Rightarrow (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot -2 - 18 = 0$

Por lo tanto, $x = -2$ es un cero del polinomio y $(x + 2)$ es uno de los factores de $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$.

Ahora se procede a realizar la operación $\left(x^3 + 2x^2 - 9x - 18\right) \div (x + 2)$.

El polinomio está ordenado en forma descendente según la variable x.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & -9 & -18 & -2 \\ & -2 & 0 & 18 & \\ \hline 1 & 0 & -9 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio $x^3+2x^2-9x-18$ es de grado 3 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 2.

$$x^3+2x^2-9x-18=\left(x^2-9\right)\left(x-2\right)$$

Entonces el polinomio original, x^4-13x^2+36, se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^4-13x^2+36 &= \left(x^3+2x^2-9x-18\right)\left(x-2\right) \\ &= \left(x^2-9\right)\left(x-2\right)\left(x-2\right) \end{aligned}$$

El primer factor se puede factorizar aplicando el método de diferencia de cuadrados. Entonces:

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-9x-18 &= \left(x^2-9\right)\left(x-2\right) \\ &= \left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la factorización completa del polinomio x^4-13x^2+36 corresponde a $\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)$.

4. Para el polinomio $6k^4+31k^3+34k^2-15k$, determine cuáles de los siguientes valores $k=\frac{1}{3}, k=\frac{-5}{2}, k=-3$ corresponden a ceros del mismo.

Solución

Si $k=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4+31\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+34\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-15\cdot\frac{1}{3}=0$$

Por lo tanto, $k=\frac{1}{3}$ es un cero del polinomio.

Si $k=\frac{-5}{2}$

$$\Rightarrow 6\cdot\left(\frac{-5}{2}\right)^4+31\cdot\left(\frac{-5}{2}\right)^3+34\cdot\left(\frac{-5}{2}\right)^2-15\cdot\frac{-5}{2}=0$$

Por lo tanto, $k=\frac{-5}{2}$ es un cero del polinomio.

Si $k=-3$

$$\Rightarrow 6\cdot(-3)^4+31\cdot(-3)^3+34\cdot(-3)^2-15\cdot-3=0$$

Por lo tanto, $k=-3$ es un cero del polinomio.

Ejercicios

1. Factorice completamente cada uno de los siguientes polinomios, sabiendo que los valores que se le proporcionan en cada caso corresponde ceros de ese polinomio.

a) $k^3 + 5k^2 + 3k - 9, \quad k = -3$

b) $2x^3 - 11x^2 - 18 + 21x, \quad x = 3$

c) $6m^2 - 150 - 25m + m^3, \quad m = -5$

d) $x^4 + 2x^2 - 3, \quad x = \pm 1$

e) $3y^3 + 10y^2 + 7y - 2, \quad y = -2$

f) $2x^4 - 7x + x^2 - 14x^3, \quad x = 7$

2. Determine todos los posibles ceros de cada uno de los siguientes polinomios y factorice completamente por el método de división sintética.

a) $2x^2 - 3x + 1$

b) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

Soluciones

1. A continuación se presenta una realización de cada ejercicio.

a) Se tiene que $k = -3$ es un cero del polinomio y $(k+3)$ es uno de sus factores.

Ahora se procede a realizar la operación $(k^3 + 5k^2 + 3k - 9) \div (k+3)$.

El polinomio está ordenado en forma descendente según la variable k.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 3 & -9 & \\ & -3 & -6 & 9 & -3 \\ \hline 1 & 2 & -3 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 3 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 2.

$$(k^2 + 2k - 3)(k+3)$$

El primer factor es un trinomio cuadrático con discriminante positivo $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 16$, el cual se puede factorizar por división sintética o con cualquiera de los métodos de completar cuadrados, fórmula general o inspección, de donde se obtiene la factorización completa del polinomio.

$$(k-1)(k+3)(k+3) = (k-1)(k+3)^2$$

b) Se tiene que $x = 3$ es un cero del polinomio y $(x-3)$ es uno de sus factores.

Se procede a realizar la operación $(2x^3 - 11x^2 - 18 + 21x) \div (x-3)$.

Se ordena el polinomio en forma descendente según la variable x de donde se obtiene $\left(2x^3-11x^2+21x-18\right)\div(x-3)$.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -11 & 21 & -18 & \\ & 6 & -15 & 18 & 3 \\ \hline 2 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 3 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 2.

$\left(2x^2-5x+6\right)(x-3)$

El primer factor es un trinomio cuadrático con discriminante negativo $\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 6=-23$, el cual no se puede factorizar en el conjunto de los números reales, de donde se obtiene la factorización completa del polinomio; es decir $\left(2x^2-5x+6\right)(x-3)$.

c) Se tiene que $m=-5$ es un cero del polinomio y $(m+5)$ es uno de sus factores.

Se procede a realizar la operación $\left(6m^2-150-25m+m^3\right)\div(m+5)$.

Se ordena el polinomio en forma descendente según la variable m de donde se obtiene $\left(m^3+6m^2-25m-150\right)\div(m+5)$.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 6 & -25 & -150 & \\ & -5 & -5 & 150 & -5 \\ \hline 1 & 1 & -30 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 3 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 2.

$\left(m^2 + m - 30\right)\left(m + 5\right)$

El primer factor es un trinomio cuadrático con discriminante positivo $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -30 = 121$, el cual se puede factorizar por división sintética o con cualquiera de los métodos de completar cuadrados, fórmula general o inspección, de donde se obtiene la factorización completa del polinomio: $\left(m+6\right)\left(m-5\right)\left(m+5\right)$.

d) Se tiene que $x = 1$ es un cero del polinomio y $\left(x-1\right)$ es uno de sus factores.

Ahora se procede a realizar la operación $\left(x^4 + 2x^2 - 3\right) \div \left(x - 1\right)$.

El polinomio está ordenado en forma descendente según la variable x.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio completando con ceros los que corresponden a los términos de grado 3 y grado 1 que no aparecen.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 & -5 \\ & 1 & 1 & 3 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 4 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 3.

$\left(x^3 + x^2 + 3x + 3\right)\left(x - 1\right)$

El primer factor es un polinomio de grado 3, así que se puede volver a efectuar el proceso de división sintética.

Se tiene que $x = -1$ es un cero del polinomio y $\left(x+1\right)$ es uno de sus factores.

Ahora se procede a realizar la operación $\left(x^3 + x^2 + 3x + 3\right) \div \left(x + 1\right)$.

El polinomio está ordenado en forma descendente según la variable x.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & \\ & -1 & 0 & -3 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 3 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 2.

$(x^2+3)(x+1)$

El primer factor es una suma de cuadrados que no es factorizable en el conjunto de los números reales, de donde se obtiene la factorización completa del polinomio: $(x^2+3)(x-1)(x+1)$.

e) Se tiene que $y=-2$ es un cero del polinomio y $(y+2)$ es uno de sus factores.

Se procede a realizar la operación $(3y^3+10y^2+7y-2)\div(y+2)$.

El polinomio está ordenado en forma descendente según la variable y.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & 7 & -2 & \\ & -6 & -8 & 2 & -2 \\ \hline 3 & 4 & -1 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 3 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 2.

$(3y^2+4y-1)(y+2)$

El primer factor es un trinomio cuadrático con discriminante positivo $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot -1 = 28$, el cual se puede factorizar con el método de fórmula general, de donde se obtiene la factorización completa del polinomio $3\left(y - \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(y - \frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)(y+2)$.

f) Se puede aplicar primero el método de factor común $x\left(2x^3 - 7 + x - 14x^2\right)$

El segundo factor es un polinomio de grado 3 en el que se tiene que $x = 7$ es un cero del polinomio y $(x-7)$ es uno de sus factores.

Ahora se procede a realizar la operación $\left(2x^3 - 7 + x - 14x^2\right) \div (x-7)$.

Se ordena el polinomio en forma descendente según la variable x de donde se obtiene $\left(2x^3 - 14x^2 + x - 7\right) \div (x-7)$.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -14 & 1 & -7 & 7 \\ & 14 & 0 & 7 & \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 3 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 2.

$\left(2x^2 + 1\right)(x-7)$

El primer factor es una suma de cuadrados que no es factorizable en el conjunto de los números reales, de donde se obtiene la factorización completa del polinomio: $x\left(2x^2 + 1\right)(x-7)$.

2. A continuación se muestra una manera de realizar el ejercicio.

a) El polinomio está ordenado en forma descendente de acuerdo a la variable x.

Como el término constante del polinomio es 1 y su coeficiente principal es 2, los posibles ceros se pueden encontrar de dos formas:

✓ Los divisores del término constante: $1, -1$.

✓ Los divisores del término constante divididos por los divisores del coeficiente del término principal.

$\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{-1}=-1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{-2}=\frac{-1}{2}$
$\frac{-1}{1}=-1$	$\frac{-1}{-1}=1$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

Por lo tanto todos los posibles ceros del polinomio son los elementos del conjunto $\left\{-1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Ahora se busca uno de los ceros.

Si $x=1$

$\Rightarrow 2\cdot 1^2-3\cdot 1+1=0$

Por lo tanto, $x=1$ es un cero del polinomio y $(x-1)$ es uno de sus factores.

Ahora se procede a realizar la operación $(2x^2-3x+1)\div(x-1)$.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio que ya está ordenado para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & -3 & 1 & \\ & 2 & -1 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 2 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 1 y se obtiene la factorización completa del polinomio: $(2x-1)(x-1)$.

b) Como el término constante del polinomio es -18 y su coeficiente principal es 1, los posibles ceros son: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18$.

Ahora se busca uno de los ceros.

Si $x=-2$

$\Rightarrow (-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 - 9\cdot -2 - 18 = 0$

Por lo tanto, $x=-2$ es un cero del polinomio y $(x+2)$ es uno de sus factores.

Ahora se procede a realizar la operación $\left(x^3+2x^2-9x-18\right)\div(x+2)$.

El polinomio está ordenado en forma descendente según la variable x.

Se escriben los coeficientes numéricos del polinomio para efectuar la división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & -9 & -18 & 1 \\ & -2 & 0 & 18 & \\ \hline 1 & 0 & -9 & 0 & \end{array}$$

Los coeficientes numéricos obtenidos en la división son los coeficientes del cociente. Como el polinomio original es de grado 3 y se dividió por uno de grado 1, el cociente es de grado 2.

$\left(x^2-9\right)(x+2)$

El primer factor es una diferencia de cuadrados, de donde se obtiene la factorización completa del polinomio: $(x-3)(x+3)(x+2)$.