Ejemplos

1. Resuelva la ecuación $|x-3| = 8$.

Solución

Para que se cumpla la igualdad $|x-3| = 8$, entonces $x-3=8$ o $x-3=-8$.

Para determinar el conjunto solución de la ecuación $|x-3| = 8$ se resuelven las dos anteriores:

Ecuación 1	Ecuación 2
$x-3=8$ $x=8+3$ $x=11$	$x-3=-8$ $x=-8+3$ $x=-5$

La igualdad $|x-3| = 8$ se cumple si $x = 11$ o si $x=-5$.

Por lo tanto, $S = \{-5, 11\}$.

2. Resuelva la ecuación $\left|7x-\frac{1}{2}\right| = -3$.

Solución

El valor absoluto de un número real siempre es positivo o igual a 0, por lo tanto, para ningún valor de $x \in IR$ se cumple la igualdad $\left|7x-\frac{1}{2}\right| = -3$.

Por lo tanto, $S = \varnothing$.

3. Resuelva la ecuación $|2x+4| = x-8$.

Solución

Para que se cumpla la igualdad $|2x+4| = x-8$, deben darse las siguientes dos condiciones:

- $x-8 \geq 0$, es decir que $x \geq 8$.
- $2x+4 = x-8$ o $2x+4 = 8-x$.

Para determinar el conjunto solución de la ecuación $|2x+4| = x-8$ se deben resolver las ecuaciones $2x+4 = x-8$ y $2x+4 = 8-x$ con la condición $x-8 \geq 0$.

Lo anterior significa que se considerarán como soluciones solo los valores obtenidos que sean mayores o iguales que 8 ($x \geq 8$).

Ecuación 1	Ecuación 2
$2x+4 = x-8$ $2x-x = -8-4$ $x = -12$	$2x+4 = 8-x$ $2x+x = 8-4$ $3x = 4$ $x = \frac{4}{3}$

Como las dos soluciones son menores que 8, entonces $S = \varnothing$.

4. Resuelva la ecuación $|3x-8| = x+2$.

Solución

Para que se cumpla la igualdad $|3x-8| = x+2$, deben darse las siguientes dos condiciones:

- $x+2 \geq 0$, es decir que $x \geq -2$.
- $3x-8 = x+2$ o $3x-8 = -x-2$.

Para determinar el conjunto solución de la ecuación $|3x-8| = x+2$ se deben resolver las ecuaciones $3x-8 = x+2$ y $3x-8 = -x-2$ con la condición $x \geq -2$.

Lo anterior significa que se considerarán como soluciones solo los valores obtenidos que sean mayores o iguales que -2 $(x \geq -2)$.

Ecuación 1	Ecuación 2
$3x-8 = x+2$	$3x-8 = -x-2$
$3x-x = 2+8$	$3x+x = -2+8$
$2x = 10$	$4x = 6$
$x = \frac{10}{2}$	$x = \frac{6}{4}$
$x = 5$	$x = \frac{3}{2}$

Como las dos soluciones son mayores que -2, entonces $S = \left\{\frac{3}{2}, 5\right\}$.

5. Resuelva la ecuación $\left|\dfrac{x-3}{2}\right| = \dfrac{21}{2} - x$.

Solución

Para que se cumpla la igualdad $\left|\dfrac{x-3}{2}\right| = \dfrac{21}{2} - x$, deben darse las siguientes dos condiciones:

- $\dfrac{21}{2} - x \geq 0$, es decir que $x \leq \dfrac{21}{2}$.
- $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{21}{2} - x$ o $\dfrac{x-3}{2} = x - \dfrac{21}{2}$.

Para determinar el conjunto solución de la ecuación $\left|\dfrac{x-3}{2}\right| = \dfrac{21}{2} - x$ se deben resolver las ecuaciones $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{21}{2} - x$ y $\dfrac{x-3}{2} = x - \dfrac{21}{2}$ con la condición $x \leq \dfrac{21}{2}$.

Lo anterior significa que se considerarán como soluciones solo los valores obtenidos que sean menores o iguales que $\dfrac{21}{2}$ ($x \leq \dfrac{21}{2}$).

Ecuación 1	Ecuación 2
$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{21}{2} - x$	$\dfrac{x-3}{2} = x - \dfrac{21}{2}$
$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{21-2x}{2}$	$\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{2x-21}{2}$
$x-3 = 21-2x$	$x-3 = 2x-21$
$x+2x = 21+3$	$x-2x = -21+3$
$3x = 24$	$-x = -18$
$x = 8$	$x = 18$

Como $8 < \dfrac{21}{2}$ pero $18 > \dfrac{21}{2}$, entonces $S = \{8\}$.

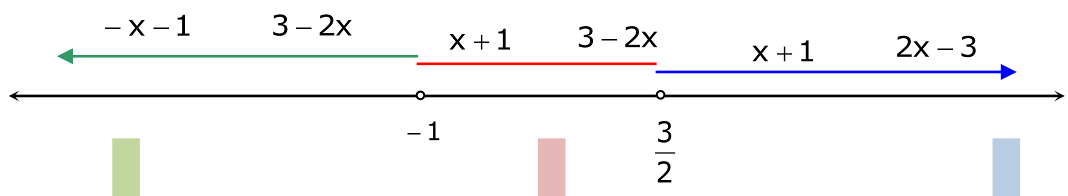
6. Resuelva la ecuación $|x+1| = |2x-3|$.

Solución

Observe que: $|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{si } x < -1 \end{cases}$ $\qquad |2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \\ 3-2x, & \text{si } x < \frac{3}{2} \end{cases}$

Para resolver la ecuación hay que trabajar en los siguientes intervalos:

$]-\infty, -1[$	En este intervalo $x+1$ tiene valor negativo y $2x-3$ también.
$\left[-1, \frac{3}{2}\right[$	En este intervalo $x+1$ tiene valor positivo y $2x-3$ es negativo.
$\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$	En este intervalo $x+1$ tiene valor positivo y $2x-3$ también.



Primer caso: $x \in]-\infty, -1[$	**Segundo caso:** $x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right[$	**Tercer caso:** $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$
$-x-1 = 3-2x$ $-x+2x = 3+1$ $x = 4$ Como el resultado no pertenece a $]-\infty, -1[$, entonces $S_1 = \varnothing$.	$x+1 = 3-2x$ $x+2x = 3-1$ $x = \frac{2}{3}$ Como el resultado pertenece a $\left[-1, \frac{3}{2}\right[$, entonces $S_2 = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.	$x+1 = 2x-3$ $x-2x = -3-1$ $x = 4$ Como el resultado pertenece a $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$, entonces $S_3 = \{4\}$.

El conjunto solución de la ecuación $|x+1| = |2x-3|$ es el resultado de unir los conjuntos soluciones de cada caso, es decir $S = \left\{\frac{2}{3}, 4\right\}$.

7. Resuelva la ecuación $|2x-1| = |x-5| - 2$.

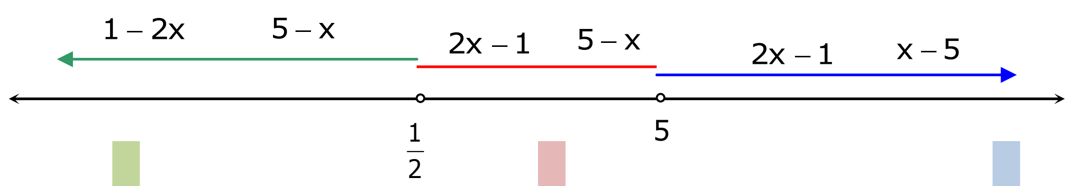
Solución

Observe que:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x, & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases} \qquad\qquad |x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{si} \quad x \geq 5 \\ 5-x, & \text{si} \quad x < 5 \end{cases}$$

Para resolver la ecuación hay que trabajar en los siguientes intervalos:

$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$	En este intervalo $2x-1$ tiene valor negativo y $x-5$ también.
$\left[\frac{1}{2}, 5\right[$	En este intervalo $2x-1$ tiene valor positivo y $x-5$ negativo.
$[5, +\infty[$	En este intervalo $2x-1$ tiene valor positivo y $x-5$ también.



Primer caso: $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$	**Segundo caso:** $x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right[$	**Tercer caso:** $x \in [5, +\infty[$
$1-2x = 5-x-2$ $-2x+x = 3-1$ $x = -2$ Como el resultado pertenece a $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, entonces $S_1 = \{-2\}$.	$2X-1 = 5-x-2$ $2x+x = 3+1$ $x = \frac{4}{3}$ Como el resultado pertenece a $\left[\frac{1}{2}, 5\right[$, entonces $S_2 = \left\{\frac{4}{3}\right\}$.	$2x-1 = x-5-2$ $2x-x = -7+1$ $x = -6$ Como el resultado pertenece a $[5, +\infty[$, entonces $S_3 = \{-6\}$.

El conjunto solución de la ecuación $|2x-1| = |x-5| - 2$ es el resultado de unir los conjuntos soluciones de cada caso, es decir $S = \left\{-6, -2, \frac{4}{3}\right\}$.

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $|7x-3| = 11$

b) $4-3 = |4x-3|$

c) $|2x-5| = -1$

d) $|5x-2| = x-4$

e) $|2x-2| + 5 = 2-x$

f) $|2x-4| = |x-3|$

g) $5 + |5x-1| = |1-x| + 2$

Soluciones

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $|7x-3|=11$

Para que se cumpla la igualdad $|7x-3|=11$, entonces $7x-3=11$ o $7x-3=-11$.

Para determinar el conjunto solución de la ecuación $|7x-3|=11$ se resuelven las dos anteriores:

Ecuación 1	Ecuación 2
$7x-3=11$	$7x-3=-11$
$7x=14$	$7x=-8$
$x=\frac{14}{7}$	$x=\frac{-8}{7}$
$x=2$	

La igualdad $|7x-3|=11$ se cumple si $x=2$ o si $x=\frac{-8}{7}$.

Por lo tanto, $S=\left\{\frac{-8}{7}, 2\right\}$.

b) $4-3=|4x-3|$

La ecuación $4-3=|4x-3|$ equivale a $|4x-3|=1$.

Para que se cumpla la igualdad $4-3=|4x-3|$, entonces $4x-3=1$ o $4x-3=-1$.

Para determinar el conjunto solución de la ecuación $4-3=|4x-3|$ se resuelven las dos anteriores:

Ecuación 1	Ecuación 2
$4x-3=1$ $4x=4$ $x=1$	$4x-3=-1$ $4x=2$ $x=\frac{2}{4}$ $x=\frac{1}{2}$

La igualdad $4-3=|4x-3|$ se cumple si $x=1$ o si $x=\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, $S=\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

c) $|2x-5|=-1$

El valor absoluto de un número real siempre es positivo o igual a 0.
Por lo tanto, para ningún valor de $x \in IR$ se cumple la igualdad $|2x-5|=-1$; es decir $S=\varnothing$.

d) $|5x-2| = x-4$

Para que se cumpla la igualdad $|5x-2| = x-4$, deben darse las siguientes dos condiciones:

- $x-4 \geq 0$, es decir que $x \geq 4$.
- $5x-2 = x-4$ o $5x-2 = 4-x$.

Para determinar el conjunto solución de la ecuación $|5x-2| = x-4$ se deben resolver las ecuaciones $5x-2 = x-4$ y $5x-2 = 4-x$ con la condición $x \geq 4$.

Lo anterior significa que se considerarán como soluciones solo los valores obtenidos que sean mayores o iguales que 4 $(x \geq 4)$.

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$5x-2 = x-4$	$5x-2 = 4-x$
$5x-x = -4+2$	$5x+x = 4+2$
$4x = -2$	$6x = 6$
$x = \frac{-2}{4}$	$x = 1$
$x = \frac{-1}{2}$	

Como $\frac{-1}{2} < 4$ y $1 < 4$, entonces $S = \varnothing$.

e) $|2x-2|+5=2-x$

La ecuación $|2x-2|+5=2-x$ equivale a $|2x-2|=-3-x$.

Para que se cumpla la igualdad $|2x-2|=-3-x$, deben darse las siguientes dos condiciones:

- $-3-x\geq 0$, es decir que $x\leq -3$.
- $2x-2=-3-x$ o $2x-2=3+x$.

Para determinar el conjunto solución de la ecuación $|2x-2|=-3-x$ se deben resolver las ecuaciones $2x-2=-3-x$ y $2x-2=3+x$ con la condición $x\leq -3$.

Lo anterior significa que se considerarán como soluciones solo los valores obtenidos que sean menores o iguales que $\frac{21}{2}$ $(x\leq -3)$.

Ecuación 1	Ecuación 2
$2x-2=-3-x$ $2x+x=-3+2$ $3x=-1$ $x=\frac{-1}{3}$	$2x-2=3+x$ $2x-x=3+2$ $x=5$

Como $5>-3$ y $\frac{-1}{3}>-3$, entonces $S=\varnothing$.

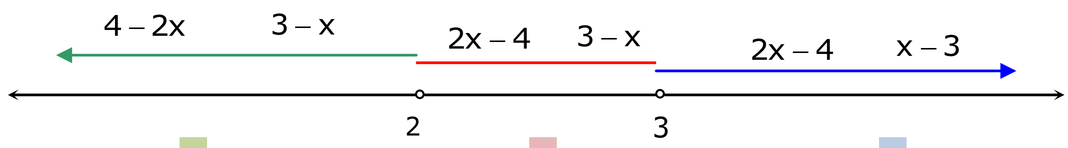
f) $|2x-4| = |x-3|$

Observe que:

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, & \text{si} \quad x \geq 2 \\ 4-2x, & \text{si} \quad x < 2 \end{cases} \qquad |x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{si} \quad x \geq 3 \\ 3-x, & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

Para resolver la ecuación hay que trabajar en los siguientes intervalos:

$]-\infty, 2[$	En este intervalo $2x-4$ tiene valor negativo y $x-3$ también.
$[2, 3[$	En este intervalo $2x-4$ tiene valor positivo y $x-3$ negativo.
$[3, +\infty[$	En este intervalo $2x-4$ tiene valor positivo y $x-3$ también.



Primer caso: $x \in]-\infty, 2[$	**Segundo caso:** $x \in [2, 3[$	**Tercer caso:** $x \in [3, +\infty[$
$4-2x = 3-x$ $-2x+x = 3-4$ $-x = -1$ $x = 1$ Como el resultado pertenece a $]-\infty, 2[$, entonces $S_1 = \{1\}$.	$2x-4 = 3-x$ $2x+x = 3+4$ $3x = 7$ $x = \frac{7}{3}$ Como el resultado pertenece a $[2, 3[$, entonces $S_2 = \left\{\frac{7}{3}\right\}$.	$2x-4 = x-3$ $2x-x = -3+4$ $x = 1$ Como el resultado no pertenece a $[3, +\infty[$, entonces 1 no es solución para este caso.

El conjunto solución de la ecuación $|2x-4| = |x-3|$ es $S = \left\{1, \frac{7}{3}\right\}$.

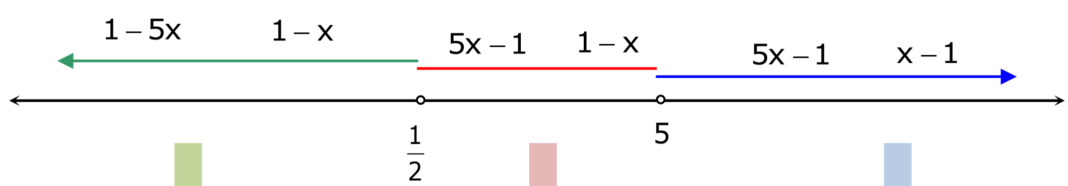
g) $5 + |5x - 1| = |1 - x| + 2$

Observe que:

$$|5x-1| = \begin{cases} 5x-1, & \text{si} \quad x \geq \dfrac{1}{5} \\ 1-5x, & \text{si} \quad x < \dfrac{1}{5} \end{cases} \qquad |1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x-1, & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Para resolver la ecuación hay que trabajar en los siguientes intervalos:

$\left]-\infty, \frac{1}{5}\right[$	En este intervalo $5x-1$ tiene valor negativo y $1-x$ positivo.
$\left[\frac{1}{5}, 1\right[$	En este intervalo $5x-1$ tiene valor positivo y $1-x$ también.
$\left[1, +\infty\right[$	En este intervalo $5x-1$ tiene valor positivo y $1-x$ negativo.



Primer caso: $x \in \left]-\infty, \frac{1}{5}\right[$	**Segundo caso:** $x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right[$	**Tercer caso:** $x \in \left[1, +\infty\right[$
$5 + 1 - 5x = 1 - x + 2$ $-5x + x = 3 - 6$ $-4x = -3$ $x = \frac{3}{4}$ Como el resultado no pertenece a $\left]-\infty, \frac{1}{5}\right[$, entonces $S_1 = \varnothing$.	$5 + 5x - 1 = 1 - x + 2$ $5x + x = 3 - 4$ $6x = -1$ $x = \frac{-1}{6}$ Como el resultado no pertenece a $\left[\frac{1}{5}, 1\right[$, entonces $S_2 = \varnothing$.	$5 + 5x - 1 = x - 1 + 2$ $5x - x = 1 - 4$ $4x = -3$ $x = \frac{-3}{4}$ Como el resultado no pertenece a $\left[1, +\infty\right[$, entonces $S_3 = \varnothing$.

El conjunto solución de la ecuación $5 + |5x - 1| = |1 - x| + 2$ es $S = \varnothing$.