ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE 2

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

Solución

Ecuación	$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
Se determina un cero del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ para encontrar uno de sus factores.	Algunos posibles ceros son: $-1, 1, -2, 2, -3, 3$ Se prueba si -1 es un cero de $x^3 - 4x^2 + x + 6$: $(-1)^3 - 4(-1)^2 + -1 + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$ Como -1 sí es un cero de $x^3 - 4x^2 + x + 6$, entonces $x + 1$ es un factor de $x^3 - 4x^2 + x + 6$.
Mediante la división de polinomios se determina el polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x+1)$. Se resuelve $P(x) \div (x+1)$.	$(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (x+1)$ $\begin{array}{cccc\|c} 1 & -4 & 1 & 6 & \\ & -1 & 5 & -6 & -1 \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$ $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ Por lo tanto, $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$.
Se factoriza el polinomio $Q(x)$.	$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$ $= (x+1)(x-3)(x-2)$
Se escribe el conjunto solución.	Como $P(x) = (x+1)(x-3)(x-2)$ entonces el conjunto solución de la ecuación $P(x) = 0$ es: $S = \{-1, 2, 3\}$.

2. Resuelva la ecuación $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$.

Solución

Ecuación	$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$
Se determina un cero del polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ para encontrar uno de sus factores.	Algunos posibles ceros son: $-1, 1, -2, 2$ Se prueba si 1 es un cero de $2x^3 + x^2 - 5x + 2$: $2 \cdot 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 2 + 1 - 5 + 2 = 0$ Como 1 es un cero de $2x^3 + x^2 - 5x + 2$, entonces $x - 1$ es un factor de $2x^3 + x^2 - 5x + 2$.
Mediante la división de polinomios se determina el polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x-1)$. Se resuelve $P(x) \div (x-1)$.	$(2x^3 + x^2 - 5x + 2) \div (x - 1)$ $\begin{array}{rrrr\|r} 2 & 1 & -5 & 2 & 1 \\ & 2 & 3 & -2 & \\ \hline 2 & 3 & -2 & 0 & \end{array}$ $Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$ Por lo tanto, $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x-1)(2x^2 + 3x - 2)$.
Se factoriza el polinomio $Q(x)$.	$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x-1)(2x^2 + 3x - 2)$ $= (x - 1)(2x - 1)(x + 2)$
Se escribe el conjunto solución.	Como $P(x) = (x-1)2(x-1)(x+2)$ entonces el conjunto solución de la ecuación $P(x) = 0$ es: $S = \left\{-2, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

3. Resuelva la ecuación $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$.

Solución

Ecuación	$x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$
Se determina un cero del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ para encontrar uno de sus factores.	Algunos posibles ceros son: $-1, 1, -3, 3$ Se prueba si 3 es un cero de $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$: $3^3 - 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 3 = 27 - 36 + 12 - 3 = 0$ Como 3 es un cero de $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$, entonces $x - 3$ es un factor de $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$.
Mediante la división de polinomios se determina el polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x-3)$. Se resuelve $P(x) \div (x - 3)$.	$(x^3 - 4x^2 + 4x - 3) \div (x - 3)$ $\begin{array}{cccc\|c} 1 & -4 & 4 & -3 & 3 \\ & 3 & -3 & 3 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & \end{array}$ $Q(x) = x^2 - x + 1$ Por lo tanto, $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = (x-3)(x^2 - x + 1)$.
Se factoriza el polinomio $Q(x)$.	En este caso $Q(x) = x^2 - x + 1$, no es factorizable en IR.
Se escribe el conjunto solución.	Como $P(x) = (x-3)(x^2 - x + 1)$ entonces el conjunto solución de la ecuación $P(x) = 0$ es: $S = \{3\}$.

4. Resuelva la ecuación $2x^3 - 15x^2 + 36x - 27 = 0$.

Solución

Ecuación	$2x^3 - 15x^2 + 36x - 27 = 0$
Se determina un cero del polinomio $P(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 27$ para encontrar uno de sus factores.	Algunos posibles ceros son: $-1, 1, -3, 3, 9, -9, 27, -27$. Se prueba si 3 es un cero de $2x^3 - 15x^2 + 36x - 27$: $2 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 - 27 = 54 - 135 + 108 - 27 = 0$ Como 3 es un cero de $2x^3 - 15x^2 + 36x - 27$, entonces $x - 3$ es un factor de $2x^3 - 15x^2 + 36x - 27$.
Mediante la división de polinomios se determina el polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x-3)$. Se resuelve $P(x) \div (x-3)$.	$(2x^3 - 15x^2 + 36x - 27) \div (x-3)$ $\begin{array}{rrrr\|r} 2 & -15 & 36 & -27 & 3 \\ & 6 & -27 & 27 & \\ \hline 2 & -9 & 9 & 0 & \end{array}$ $Q(x) = 2x^2 - 9x + 9$ Por lo tanto, $2x^3 - 15x^2 + 36x - 27 = (x-3)(2x^2 - 9x + 9)$.
Se factoriza el polinomio $Q(x)$.	$2x^3 - 15x^2 + 36x - 27 = (x-3)(2x^2 - 9x + 9)$ $= (x-3)(x-3)(2x-3)$
Se escribe el conjunto solución.	Como $P(x) = (x-3)(x-3)(2x-3)$ entonces el conjunto solución de la ecuación $P(x) = 0$ es: $S = \left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$.

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones con radicales:

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$
b) $2x^3 - 7x^2 - 10x + 24 = 0$
c) $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$
d) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

Soluciones

1. Resuelva las siguientes ecuaciones radicales:

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

Ecuación	$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$
Se determina un cero del polinomio $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ para encontrar uno de sus factores.	Algunos posibles ceros son: $-1, 1, -2, 2, -3, 3$. Se prueba si -1 es un cero de $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$: $(-1)^3 + 6(-1)^2 + 11 \cdot -1 + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$ Como -1 es un cero de $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, entonces $x+1$ es un factor de $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.
Mediante la división de polinomios se determina el polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x+1)$. Se resuelve $P(x) \div (x+1)$.	$(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) \div (x+1)$ $\begin{array}{cccc\|c} 1 & 6 & 11 & 6 & -1 \\ & -1 & -5 & -6 & \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$ $Q(x) = x^2 + 5x + 6$ Por lo tanto, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x^2 + 5x + 6)$.
Se factoriza el polinomio $Q(x)$.	$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x^2 + 5x + 6)$ $= (x+1)(x+2)(x+3)$
Se escribe el conjunto solución.	Como $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ entonces el conjunto solución de la ecuación $P(x) = 0$ es: $S = \{-3, -2, -1\}$.

b) $2x^3-7x^2-10x+24=0$

Ecuación	$2x^3-7x^2-10x+24=0$
Se determina un cero del polinomio $P(x)=2x^3-7x^2-10x+24$ para encontrar uno de sus factores.	Algunos posibles ceros son: $-1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -4,\ 4$. Se prueba si -2 es un cero de $2x^3-7x^2-10x+24$: $2\cdot(-2)^3-7\cdot(-2)^2-10\cdot -2+24$ $=-16-28+20+24$ $=0$ Como -2 es un cero de $2x^3-7x^2-10x+24$, entonces $x+2$ es un factor de $2x^3-7x^2-10x+24$.
Mediante la división de polinomios se determina el polinomio $Q(x)$ tal que $P(x)=Q(x)(x+2)$. Se resuelve $P(x)\div(x+2)$.	$(2x^3-7x^2-10x+24)\div(x+2)$ $\begin{array}{cccc\|c} 2 & -7 & -10 & 24 & -2 \\ & -4 & 22 & -24 & \\ \hline 2 & -11 & 12 & 0 & \end{array}$ $Q(x)=2x^2-11x+12$ Por lo tanto, $2x^3-7x^2-10x+24=(x+2)(2x^2-11x+12)$.
Se factoriza el polinomio $Q(x)$.	$2x^3-7x^2-10x+24=(x+2)(2x^2-11x+12)$ $=(x+2)(x-4)(2x-3)$
Se escribe el conjunto solución.	Como $P(x)=(x+2)(x-4)(2x-3)$ entonces el conjunto solución de la ecuación $P(x)=0$ es: $S=\left\{-2,\ \dfrac{3}{2},\ 4\right\}$.

c) $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$

Ecuación	$2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$
Se determina un cero del polinomio $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 4x - 5$ para encontrar uno de sus factores.	Algunos posibles ceros son: $-1, 1, -5, 5$. Se prueba si 5 es un cero de $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5$: $2 \cdot 5^3 - 9 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 - 5 = 250 - 225 - 20 - 5$ $= 0$ Como 5 sí es un cero de $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5$, entonces $x - 5$ es un factor de $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5$.
Mediante la división de polinomios se determina el polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x-5)$. Se resuelve $P(x) \div (x-5)$.	$(2x^3 - 9x^2 - 4x - 5) \div (x - 5)$ $$\begin{array}{rrrr\|r} 2 & -9 & -4 & -5 & 5 \\ & 10 & 5 & 5 & \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$ $Q(x) = 2x^2 + x + 1$ Por lo tanto, $2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x^2 + x + 1)$.
Se factoriza el polinomio $Q(x)$.	$2x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x^2 + x + 1)$
Se escribe el conjunto solución.	Como $x^2 + x + 1$ no es factorizable en IR, entonces el conjunto solución de la ecuación $P(x) = 0$ es: $S = \{5\}$.

d) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

Ecuación	$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
Se determina un cero del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ para encontrar uno de sus factores.	Los posibles ceros son: $-1, 1$. Se prueba si -1 es un cero de $x^3 - x^2 - x + 1$: $(-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$ Como -1 es un cero de $x^3 - x^2 - x + 1$, entonces $x + 1$ es un factor de $x^3 - x^2 - x + 1$.
Mediante la división de polinomios se determina el polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = Q(x)(x+1)$. Se resuelve $P(x) \div (x+1)$.	$(x^3 - x^2 - x + 1) \div (x + 1)$ $\begin{array}{cccc\|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 & \end{array}$ $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ Por lo tanto, $x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x^2 - 2x + 1)$
Se factoriza el polinomio $Q(x)$.	$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x+1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x+1)(x-1)^2 \end{aligned}$
Se escribe el conjunto solución.	Como $P(x) = (x+1)(x-1)^2$ entonces el conjunto solución de la ecuación $P(x) = 0$ es: $S = \{-1, 1\}$.

La ecuación $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ también se puede resolver mediante factorización de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= x^2(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)(x^2 - 1) \\ &= (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Una vez factorizado el polinomio, queda resolver la ecuación: $(x-1)^2(x+1) = 0$.
Por lo tanto, $S = \{-1, 1\}$.