ECUACIONES FRACCIONARIAS

Ejemplos

1. Resolver la ecuación $\frac{1}{5x}+\frac{1}{4}=\frac{1}{10x}$.

Solución

Ecuación	$\frac{1}{5x}+\frac{1}{4}=\frac{1}{10x}$
Se busca una ecuación equivalente a la original, de manera que uno de sus miembros sea 0.	$\frac{1}{5x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=0$
Se determina el dominio de cada expresión fraccionaria.	El dominio de las expresiones $\frac{1}{5x}$ y $\frac{1}{10x}$ es $IR-\{0\}$.
Se homogeneizan las fracciones.	$\frac{1}{5x}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10x}=0$ $\frac{4}{20x}+\frac{5x}{20x}-\frac{2}{20x}=0$
Se resuelve la ecuación resultante.	$4+5x-2=0$ $5x+2=0$ $x=\frac{-2}{5}$
Se escribe el conjunto solución.	$S=\left\{\frac{-2}{5}\right\}$

2. Resuelva la ecuación $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x-1}$.

Solución

Ecuación	$\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x-1}$
Se busca una ecuación equivalente a la original, de manera que uno de sus miembros sea 0.	$\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x-1}=0$
Se determina el dominio de cada expresión fraccionaria.	El dominio de la expresión $\frac{1}{2x}$ es IR $-\{0\}$. El dominio de la expresión $\frac{1}{x-1}$ es IR $-\{1\}$.
Se homogeneizan las fracciones.	$\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x-1}=0$ $\frac{x-1}{2x(x-1)}+\frac{x(x-1)}{2x(x-1)}-\frac{2x}{2x(x-1)}=0$
Se resuelve la ecuación resultante.	$x-1+x(x-1)-2x=0$ $x-1+x^2-x-2x=0$ $x^2-2x-1=0$ $x_1=\frac{2+\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot -1}}{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ $x_2=\frac{2-\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot -1}}{2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$
Se escribe el conjunto solución.	$S=\{1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\}$

3. Resuelva la ecuación $\frac{2x-9}{x-7}+\frac{x}{2}=\frac{5}{x-7}$.

Solución

Ecuación	$\frac{2x-9}{x-7}+\frac{x}{2}=\frac{5}{x-7}$
Se busca una ecuación equivalente a la original, de manera que uno de sus miembros sea 0.	$\frac{2x-9}{x-7}+\frac{x}{2}-\frac{5}{x-7}=0$
Se determina el dominio de cada expresión fraccionaria.	El dominio de las expresiones $\frac{2x-9}{x-7}$ y $\frac{5}{x-7}$ es IR $-\{7\}$. El dominio de la expresión $\frac{x}{2}$ es IR.
Se homogeneizan las fracciones.	$\frac{2x-9}{x-7}+\frac{x}{2}-\frac{5}{x-7}=0$ $\frac{2(2x-9)}{2(x-7)}+\frac{x(x-7)}{2(x-7)}-\frac{10}{2(x-7)}=0$
Se resuelve la ecuación resultante.	$2(2x-9)+x(x-7)-10=0$ $4x-18+x^2-7x-10=0$ $x^2-3x-28=0$ $x_1=\frac{3+\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot -28}}{2}=\frac{3+\sqrt{121}}{2}=7$ $x_2=\frac{3-\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot -28}}{2}=\frac{3+\sqrt{121}}{2}=-4$
Se escribe el conjunto solución.	Como 7 no puede ser solución de la ecuación, entonces: $S=\{-4\}$.

4. Resuelva la ecuación $\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x} = 0$.

Solución

Ecuación	$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x} = 0$
Se busca una ecuación equivalente a la original, de manera que uno de sus miembros sea 0.	$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x} = 0$
Se determina el dominio de cada expresión fraccionaria.	El dominio de la expresión $\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$ es $IR - \{0, 1\}$. El dominio de la expresión $\frac{1}{x}$ es $IR - \{0\}$.
Se homogeneizan las fracciones.	$\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x} = 0$ $\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} = 0$ $\frac{1}{x(x-1)} - \frac{(x-1)}{x(x-1)} = 0$
Se resuelve la ecuación resultante.	$1 - (x-1) = 0$ $1 - x + 1 = 0$ $-x + 2 = 0$ $-x = -2$ $x = 2$
Se escribe el conjunto solución.	$S = \{2\}$

5. Resuelva la ecuación $\frac{x+3}{x+2}=\frac{x+7}{x+5}$.

Solución

Ecuación	$\frac{x+3}{x+2}=\frac{x+7}{x+5}$
Se busca una ecuación equivalente a la original, de manera que uno de sus miembros sea 0.	$\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+7}{x+5}=0$
Se determina el dominio de cada expresión fraccionaria.	El dominio de la expresión $\frac{x+3}{x+2}$ es $\mathbb{R}-\{-2\}$. El dominio de la expresión $\frac{x+7}{x+5}$ es $\mathbb{R}-\{-5\}$.
Se homogeneizan las fracciones.	$\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+7}{x+5}=0$ $\frac{(x+3)(x+5)}{(x+2)(x+5)}-\frac{(x+7)(x+2)}{(x+2)(x+5)}=0$
Se resuelve la ecuación resultante.	$(x+3)(x+5)-(x+7)(x+2)=0$ $x^2+8x+15-(x^2+9x+14)=0$ $x^2+8x+15-x^2-9x-14=0$ $-x+1=0$ $x=1$
Se escribe el conjunto solución.	$S=\{1\}$

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones con radicales:

a) $\frac{1}{x}=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$

b) $\frac{6}{x}+4=2x$

c) $\frac{9}{x}=\frac{x-13}{2}+9$

d) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$

e) $\frac{x+2}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}$

Soluciones

1. Resolver las siguientes ecuaciones radicales:

a) $\frac{1}{x}=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$

Ecuación	$\frac{1}{x}=\frac{2}{3}-\frac{5}{6}$
Se busca una ecuación equivalente a la original, de manera que uno de sus miembros sea 0.	$\frac{1}{x}-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=0$
Se determina el dominio de cada expresión fraccionaria.	El dominio de la expresión $\frac{1}{x}$ es IR $-\{0\}$.
Se homogeneizan las fracciones.	$\frac{1}{x}-\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=0$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{6}=0$ $\frac{6}{6x}+\frac{x}{6x}=0$
Se resuelve la ecuación resultante.	$6+x=0$ $x=-6$
Se escribe el conjunto solución.	$S=\{-6\}$

b) $\frac{6}{x} + 4 = 2x$

Ecuación	$\frac{6}{x} + 4 = 2x$
Se busca una ecuación equivalente a la original, de manera que uno de sus miembros sea 0.	$\frac{6}{x} + 4 - 2x = 0$
Se determina el dominio de cada expresión fraccionaria.	El dominio de la expresión $\frac{6}{x}$ es $IR - \{0\}$.
Se homogeneizan las fracciones.	$\frac{6}{x} + 4 - 2x = 0$ $\frac{6}{x} + \frac{x(4-2x)}{x} = 0$
Se resuelve la ecuación resultante.	$6 + x(4 - 2x) = 0$ $6 + 4x - 2x^2 = 0$ $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot -2 \cdot 6}}{-4} = -1$ $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot -2 \cdot 6}}{-4} = 3$
Se escribe el conjunto solución.	$S = \{3\}$

c) $\dfrac{9}{x} = \dfrac{x-13}{2} + 9$

Ecuación	$\dfrac{9}{x} = \dfrac{x-13}{2} + 9$
Se busca una ecuación equivalente a la original, de manera que uno de sus miembros sea 0.	$\dfrac{9}{x} - \dfrac{x-13}{2} - 9 = 0$
Se determina el dominio de cada expresión fraccionaria.	El dominio de la expresión $\dfrac{9}{x}$ es IR $-\{0\}$. El dominio de la expresión $\dfrac{x-13}{2}$ es IR.
Se homogeneizan las fracciones.	$\dfrac{9}{x} - \dfrac{x-13}{2} - 9 = 0$ $\dfrac{18}{2x} - \dfrac{x(x-13)}{2} - \dfrac{18x}{2x} = 0$
Se resuelve la ecuación resultante.	$18 - x(x-13) - 18x = 0$ $18 - x^2 + 13x - 18x = 0$ $-x^2 - 5x + 18 = 0$ $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot -1 \cdot 18}}{-2} = -\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}$ $x_2 = \dfrac{5 - \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot -1 \cdot 18}}{-2} = -\dfrac{5-\sqrt{97}}{2}$
Se escribe el conjunto solución.	$S = \left\{-\dfrac{5+\sqrt{97}}{2}, -\dfrac{5-\sqrt{97}}{2}\right\}$

d) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$

Ecuación	$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$
Se busca una ecuación equivalente a la original, de manera que uno de sus miembros sea 0.	$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}=0$
Se determina el dominio de cada expresión fraccionaria.	El dominio de la expresión $\frac{1}{x-2}$ es $IR-\{2\}$. El dominio de la expresión $\frac{1}{x+2}$ es $IR-\{-2\}$. El dominio de la expresión $\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}$ es $IR-\{-2, 2\}$.
Se homogeneizan las fracciones.	$\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}=0$ $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x-2)(x+2)}=0$ $\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{(x-2)(x+2)}=0$
Se resuelve la ecuación resultante.	$x+2+x-2-1=0$ $2x-1=0$ $2x=1$ $x=\frac{1}{2}$
Se escribe el conjunto solución.	$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

e) $\frac{x+2}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}$

Ecuación	$\frac{x+2}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}$
Se busca una ecuación equivalente a la original, de manera que uno de sus miembros sea 0.	$\frac{x+2}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}=0$
Se determina el dominio de cada expresión fraccionaria.	El dominio de la expresión $\frac{x+2}{x-1}$ es $IR-\{1\}$. El dominio de la expresión $\frac{3}{x^2-1}=\frac{3}{(x-1)(x+1)}$ es $IR-\{-1, 1\}$. El dominio de la expresión $\frac{x}{x+1}$ es $IR-\{-1\}$.
Se homogeneizan las fracciones.	$\frac{x+2}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}=0$ $\frac{x+2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}-\frac{x}{x+1}=0$ $\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}-\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=0$
Se resuelve la ecuación resultante.	$(x+1)(x+2)+3-x(x-1)=0$ $x^2+3x+2+3-x^2+x=0$ $4x+5=0$ $4x=-5$ $x=\frac{-5}{4}$
Se escribe el conjunto solución.	$S=\left\{\frac{-5}{4}\right\}$