ECUACIONES CUADRÁTICAS

Ejemplos

Recuerde que hay distintos métodos para resolver una ecuación cuadrática, entre ellos, factorización, inspección y fórmula general.

1. Resuelva la ecuación $4-25x^2=1$.

Solución

Ecuación	$4-25x^2=1$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2+bx+c=0$ y se identifican los términos a, b y c.	$-25x^2+3=0$ $a=-25$ $b=0$ $c=3$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta=b^2-4ac$ $=0^2-4\cdot -25\cdot 3$ $=0+300$ $=300$ Como el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes x_1 y x_2.
Se determinan las soluciones.	Por despeje: $-25x^2+3=0$ $-25x^2=-3$ $x^2=\frac{-3}{-25}=\frac{3}{25}$ $x_1=\sqrt{\frac{3}{25}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$ $\quad x_2=-\sqrt{\frac{3}{25}}=\frac{-\sqrt{3}}{5}$
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S=\left\{\frac{-\sqrt{3}}{5},\frac{\sqrt{3}}{5}\right\}$

2. Resuelva la ecuación $6x + 3x^2 = 0$.

Solución

Ecuación	$6x + 3x^2 = 0$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se identifican los términos a, b y c.	$3x^2 + 6x = 0$ $a = 3$ $b = 6$ $c = 0$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta = b^2 - 4ac$ $= 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0$ $= 36 + 0$ $= 36$ Como el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes x_1 y x_2.
Se determinan las soluciones.	Por factorización: $3x^2 + 6x = 0$ $3x(x + 2) = 0$ Entonces los valores que satisfacen la ecuación son: $x_1 = 0$ $x_2 = -2$
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S = \{-2, 0\}$

3. Resuelva la ecuación $x^2 + 4 = 4x$.

Solución

Ecuación	$x^2 + 4 = 4x$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se identifican los términos a, b y c.	$x^2 - 4x + 4 = 0$ $a = 1$ $b = -4$ $c = 4$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta = b^2 - 4ac$ $= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$ $= 16 - 16$ $= 0$ Como el discriminante es cero, la ecuación solo tiene una solución real.
Se determinan las soluciones.	Por factorización: $\boxed{x^2 - 4x + 4} = 0$ Fórmula notable $(x - 2)^2 = 0$ Entonces el valor que satisface la ecuación es: $x = 2$.
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S = \{2\}$

4. Resuelva la ecuación $3x^2 - 10x = -3$.

Solución

Ecuación	$3x^2 - 10x = -3$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se identifican los términos a, b y c.	$3x^2 - 10x + 3 = 0$ $a = 3$ $b = -10$ $c = 3$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta = b^2 - 4ac$ $= (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3$ $= 100 - 36$ $= 64$ Como el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes x_1 y x_2.
Se determinan las soluciones.	Por fórmula general, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{64}}{6} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{64}}{6} = \frac{10 + 8}{6} = 3$
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$

5. Resuelva la ecuación $5m-8=6m^2$.

Solución

Ecuación	$5m-8=6m^2$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2+bx+c=0$ y se identifican los términos a, b y c.	$6m^2-5m+8=0$ $a=6$ $b=-5$ $c=8$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta=b^2-4ac$ $=(-5)^2-4\cdot 6\cdot 8$ $=25-192$ $=-167$ Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S=\varnothing$

6. Resuelva la ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{5}{4}=1+\frac{5}{8}x$.

Solución

Ecuación	$\frac{x^2}{4}+\frac{5}{4}=1+\frac{5}{8}x$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2+bx+c=0$ y se identifican los términos a, b y c.	$\frac{x^2}{4}-\frac{5}{8}x+\frac{1}{4}=0$ $a=\frac{1}{4}$ $b=\frac{-5}{8}$ $c=\frac{1}{4}$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta=b^2-4ac$ $=\left(\frac{-5}{8}\right)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ $=\frac{25}{64}-\frac{1}{4}$ $=\frac{9}{64}$ Como el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes x_1 y x_2.
Se determinan las soluciones.	Por fórmula general: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{5}{8}+\sqrt{\frac{9}{64}}}{2\cdot\frac{1}{4}}=2$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{5}{8}-\sqrt{\frac{9}{64}}}{2\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S=\left\{\frac{1}{2},2\right\}$

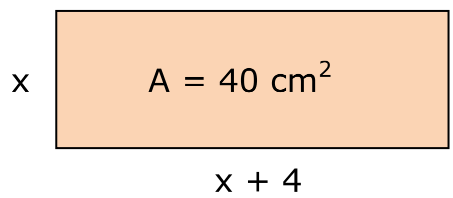
7. Escriba la ecuación cuadrática que representa la situación y resolverla.

El largo de un rectángulo mide 4 cm más que el ancho.
El área del rectángulo es 40 cm^2.
¿Cuánto miden el ancho y el largo del rectángulo?

Solución

Se representan el ancho y el largo del rectángulo en términos de x:

Ancho: x
Largo: $x + 4$



Como el área del rectángulo es 40 cm^2, entonces: $x(x+4)=40$.

Se resuelve la ecuación cuadrática:

Ecuación	$x(x+4)=40$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2+bx+c=0$ y se identifican los términos a, b y c.	$x^2+4x-40=0$ $a=1$ $b=4$ $c=-40$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta=b^2-4ac$ $=4^2-4\cdot 1\cdot -40$ $=16+160$ $=176$ Como el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes x_1 y x_2.
Se determinan las soluciones.	Por fórmula general,

	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{176}}{2} = \frac{-4-4\sqrt{11}}{2} = -2-2\sqrt{11}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{176}}{2} = \frac{-4+4\sqrt{11}}{2} = -2+2\sqrt{11}$

Se escribe la respuesta:

$-2+2\sqrt{11}+4 = 2+2\sqrt{11}$

El ancho del rectángulo mide $\left(-2+2\sqrt{11}\right)$ cm y el largo, $\left(2+2\sqrt{11}\right)$ cm.

Se escoge la solución $\left(-2+2\sqrt{11}\right)$ porque se trata de una distancia y $\left(-2-2\sqrt{11}\right)$ es negativo.

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $-x^2 + 12x = 0$

b) $8m^2 - 1 = 5 - 2m(1 - m)$

c) $2x^2 + 24x = -72$

d) $x^2 + 5 = 6x$

e) $2x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2$

f) $(x + 3)^2 = 12 - x^2$

g) $-8 - 3x = 2(x + 1)^2$

2. Determine el valor de k para que la ecuación $x^2 + kx + 64 = 0$ cumpla cada condición.

a) La ecuación tiene una única solución en IR.

b) La ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

c) La ecuación no tiene soluciones en IR.

3. Resolver las siguiente situación:

El doble del producto de dos números enteros consecutivos equivale a la suma de 143 y el cuadrado del segundo número. ¿De qué números se trata?

Soluciones

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $-x^2+12x=0$

Ecuación	$-x^2+12x=0$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2+bx+c=0$ y se identifican los términos a, b y c.	$-x^2+12x=0$ $a=-1$ $b=12$ $c=0$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta=b^2-4ac$ $=12^2-4\cdot-1\cdot 0$ $=144-0$ $=144$ Como el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes x_1 y x_2.
Se determinan las soluciones.	Por factorización: $-x^2+12x=0$ $-x(x-12)=0$ Entonces: $x_1=0$ $x_2=12$
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S=\{0,12\}$

b) $8m^2 - 1 = 5 - 2m(1 - m)$

Ecuación	$8m^2 - 1 = 5 - 2m(1 - m)$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se identifican los términos a, b y c.	$6m^2 + 2m - 6 = 0$ $a = 6$ $b = 2$ $c = -6$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta = b^2 - 4ac$ $= 2^2 - 4 \cdot 6 \cdot -6$ $= 4 + 144$ $= 148$ Como el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes x_1 y x_2.
Se determinan las soluciones.	Por fórmula general, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{148}}{12} = \frac{-2 - 2\sqrt{37}}{12} = \frac{-1 - \sqrt{37}}{6}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{148}}{12} = \frac{-2 + 2\sqrt{37}}{12} = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}$
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{37}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{37}}{6} \right\}$

c) $2x^2 + 24x = -72$

Ecuación	$2x^2 + 24x = -72$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se identifican los términos a, b y c.	$2x^2 + 24x + 72 = 0$ $a = 2$ $b = 24$ $c = 72$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta = b^2 - 4ac$ $= 24^2 - 4 \cdot 2 \cdot 72$ $= 576 - 576$ $= 0$ Como el discriminante es 0, la ecuación tiene una solución real.
Se determinan las soluciones.	Por fórmula general, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-24 \pm 0}{4} = \dfrac{-24}{4} = -6$
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S = \{-6\}$

d) $x^2 + 5 = 6x$

Ecuación	$x^2 + 5 = 6x$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se identifican los términos a, b y c.	$x^2 - 6x + 5 = 0$ $a = 1$ $b = -6$ $c = 5$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta = b^2 - 4ac$ $= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$ $= 36 - 20$ $= 16$ Como el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes x_1 y x_2.
Se determinan las soluciones.	Por fórmula general, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} = \frac{6+4}{2} = 5$
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S = \{1, 5\}$

e) $2x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2$

Ecuación	$2x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se identifican los términos a, b y c.	$x^2 + 2x + 3 = 0$ $a = 1$ $b = 2$ $c = 3$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta = b^2 - 4ac$ $= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$ $= 4 - 12$ $= -8$ Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones en IR.
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S = \varnothing$

f) $(x+3)^2 = 12 - x^2$

Ecuación	$(x+3)^2 = 12 - x^2$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se identifican los términos a, b y c.	$2x^2 + 6x - 3 = 0$ $a = 2$ $b = 6$ $c = -3$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta = b^2 - 4ac$ $= 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3$ $= 36 + 24$ $= 60$ Como el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes x_1 y x_2.
Se determinan las soluciones.	Por fórmula general, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{60}}{4} = \frac{-6-2\sqrt{15}}{4} = \frac{-3-\sqrt{15}}{2}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{60}}{4} = \frac{-6+2\sqrt{15}}{4} = \frac{-3+\sqrt{15}}{2}$
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S = \left\{ \frac{-3-\sqrt{15}}{2}, \frac{-3+\sqrt{15}}{2} \right\}$

g) $-8-3x=2(x+1)^2$

Ecuación	$-8-3x=2(x+1)^2$
Se escribe la ecuación en la forma $ax^2+bx+c=0$ y se identifican los términos a, b y c.	$2x^2+7x+10=0$ $a=2$ $b=7$ $c=10$
Se determina el valor del discriminante.	$\Delta=b^2-4ac$ $=7^2-4\cdot 2\cdot 10$ $=49-80$ $=-31$ Como el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.
Se escribe el conjunto solución de la ecuación.	$S=\varnothing$

2. Determine el valor de k para que la ecuación $x^2+kx+64=0$ cumpla cada condición.

a) La ecuación tiene una única solución en IR.

Para que la ecuación tenga una única solución, el discriminante debe ser igual a 0.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= k^2-4\cdot 1\cdot 64\\ &= k^2-256\end{aligned}$$

Hay que resolver la ecuación $k^2-256=0$:

$$k^2-256=0$$
$$k^2=256$$
$$k_1=16 \qquad k_2=-16$$

Los valores de k para los cuales la ecuación $x^2+kx+64=0$ tiene una única solución son 16 y -16.

b) La ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Para que la ecuación tenga dos soluciones reales distintas, el discriminante debe ser mayor que 0.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= k^2-4\cdot 1\cdot 64\\ &= k^2-256\end{aligned}$$

Hay que resolver $k^2-256>0$:

$$k^2-256>0$$
$$k^2>256$$
$$|k|>16$$

Por lo tanto, k puede ser mayor que 16 o menor que -16.

Los valores de k para los cuales la ecuación $x^2+kx+64=0$ tiene dos soluciones reales distintas son $k\in\,]-\infty,-16[$ o $k\in\,]16,+\infty[$.

c) La ecuación no tiene soluciones en IR.

Para que la ecuación no tenga soluciones reales, el discriminante debe ser menor que 0.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= k^2 - 4\cdot 1\cdot 64\\ &= k^2 - 256\end{aligned}$$

Hay que resolver $k^2 - 256 < 0$:

$$\begin{aligned}&k^2 - 256 < 0\\ &k^2 < 256\\ &|k| < 16\end{aligned}$$

Por lo tanto, k debe estar comprendido entre -16 y 16.

Los valores de k para los cuales la ecuación $x^2+kx+64=0$ no tiene soluciones reales son $k \in \left]-16, 16\right[$.

3. Resuelva las siguiente situación:

El doble del producto de dos números enteros consecutivos equivale a la suma de 143 y el cuadrado del segundo número. ¿De qué números se trata?

Se representan los números consecutivos con lenguaje algebraico:

Si x representa el menor de los números enteros consecutivos, el número mayor corresponde a $x + 1$. Por lo tanto:

$$2x(x+1) = 143 + (x+1)^2$$

El doble del producto de los números

La suma de 143 y el cuadrado del segundo número.

Se resuelve la ecuación anterior:

$$2x(x+1) = 143 + (x+1)^2$$
$$2x^2 + 2x = 143 + x^2 + 2x + 1$$
$$x^2 = 144$$
$$x_1 = 12 \qquad x_2 = -12$$

Note que hay dos respuestas para este ejercicio.

Si $x_1 = 12$ entonces los números son 12 y 13. Observe que en este caso tanto el doble producto de los números como la suma de 143 y el cuadrado del segundo número es 312.

Si $x_2 = -12$ entonces los números son -12 y -11 [el número y su consecutivo]. Observe que en este caso tanto el doble producto de los números como la suma de 143 y el cuadrado del segundo número es 264.