



PROBLEMAS CON ECUACIONES

Ejemplos

1. Resuelva el siguiente problema:

La edad de Julia es 4 veces la edad de Danilo. Si ambas edades suman 75 años, ¿qué edad tiene cada persona?

Solución

En este problema las incógnitas son la edad de Julia y la de Danilo.

Edad de Danilo: x

Edad de Julia: $4x$

Ambas edades suman 75 años: $x + 4x = 75$

Se debe resolver la siguiente ecuación:

$$x + 4x = 75$$

$$5x = 75$$

$$x = 15$$

Como $x = 15$, entonces $4x = 60$.

Respuesta: La edad de Danilo es 15 años y la de Julia 60 años.

2. Resuelva el siguiente problema:

La cantidad de cerca necesaria para encerrar un terreno rectangular con una línea de alambre es de 3 000 m. La diferencia entre el largo y el ancho del terreno es de 50 m. ¿Cuál es el área del terreno?

Solución

En este problema hay que determinar las medidas del largo y del ancho del terreno, para después determinar su área.

Largo: x

Ancho: y



Para hallar la solución al problema se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 3000 \\ x - y = 50 \end{cases}$$

El perímetro del terreno es de 3 000 m.

La diferencia entre el largo y el ancho es de 50 m.

Para resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 3000 \\ x - y = 50 \end{cases}$ se puede usar el método de suma y resta:

A	Se busca eliminar la variable x . Para hacerlo se multiplica la segunda ecuación por -2 .	$\begin{cases} 2x + 2y = 3000 \\ -2x + 2y = -100 \end{cases}$
B	Se suman las ecuaciones obtenidas.	$\begin{cases} 2x + 2y = 3000 \\ -2x + 2y = -100 \\ \hline 0 + 4y = 2900 \end{cases}$
C	Se resuelve la ecuación obtenida.	$\begin{aligned} 4y &= 2900 \\ y &= 725 \end{aligned}$
D	Se sustituye el valor obtenido para y en la primera ecuación.	$\begin{aligned} 2x + 2y &= 3000 \\ 2x + 2 \cdot 725 &= 3000 \\ 2x &= 1550 \\ x &= 775 \end{aligned}$
E	Se anota el conjunto solución.	El sistema tiene solución única. $S = \{(775, 725)\}$

El largo del terreno mide 775 m y el ancho 725 m.

Por lo tanto, su área es $775 \cdot 725 = 561\,875 \text{ m}^2$.

Respuesta: El área del terreno es de $561\,875 \text{ m}^2$.



3. Resuelva el siguiente problema:

El denominador de una fracción es 4 unidades mayor que el numerador. Si el numerador de esa fracción se aumenta en 5 y el denominador en 3, se obtiene una fracción equivalente a $\frac{4}{5}$. ¿De qué fracción se trata?

Solución

En este problema se debe determinar el numerador y el denominador de una fracción.

Numerador: x
 Denominador: $x + 4$
 Fracción original: $\frac{x}{x + 4}$

Entonces se debe resolver la ecuación:

$$\frac{x + 5}{x + 4 + 3} = \frac{4}{5}$$

Si el numerador de esa fracción se aumenta en 5 y el denominador en 3, se obtiene una fracción equivalente a $\frac{4}{5}$.

Solución de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{x + 5}{x + 4 + 3} &= \frac{4}{5} \\ \frac{x + 5}{x + 7} &= \frac{4}{5} \\ 5(x + 5) &= 4(x + 7) \\ 5x + 25 &= 4x + 28 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta: El numerador de la fracción es 3, y el denominador, 7. La fracción es $\frac{3}{7}$.



4. Resuelva el siguiente problema:

En el cine una familia pagó ¢11 700 por 2 entradas de niño y 3 de adulto. Otra familia pagó ¢9 900 por 4 boletos de niño y uno de adulto. ¿Cuál es el precio de cada boleto?

Solución

En este problema hay dos incógnitas:

- el valor de la entrada de niños y
- el de la entrada de adulto.

Valor de la entrada de niño: x

Valor de la entrada de adulto: y

Para hallar la solución al problema se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11700 \\ 4x + y = 9900 \end{cases}$$

Primera familia: Compraron 2 entradas de niño y 3 de adulto. Pagaron ¢11 700.

Segunda familia: Compraron 4 entradas de niño y 1 de adulto. Pagaron ¢9 900.

Para resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 11700 \\ 4x + y = 9900 \end{cases}$ se puede usar el método de suma y resta:

A	Se busca eliminar la variable x . Para hacerlo se multiplica la primera ecuación por -2 .	$\begin{cases} -4x - 6y = -23400 \\ 4x + y = 9900 \end{cases}$
B	Se suman las ecuaciones obtenidas.	$\begin{cases} -4x - 6y = -23400 \\ 4x + y = 9900 \\ \hline 0 - 5y = -13500 \end{cases}$
C	Se resuelve la ecuación obtenida.	$\begin{aligned} -5y &= -13500 \\ y &= 2700 \end{aligned}$



D	Se sustituye el valor obtenido para y en la primera ecuación.	$-4x - 6y = -23\,400$ $-4x - 6 \cdot 2\,700 = -23\,400$ $-4x = -7\,200$ $x = 1\,800$
E	Se escribe el conjunto solución.	<p>El sistema tiene solución única.</p> $S = \{(1\,800, 2\,700)\}$

Respuesta: El valor de cada entrada de niño es $\phi 1\,800$ y cada entrada de adulto cuesta $\phi 2\,700$.



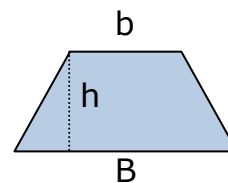
Ejercicios

1. Resuelva el siguiente problema:

La suma de un número negativo y su cuadrado es igual a las tres cuartas partes del número. ¿De qué número se trata?

2. Resuelva el siguiente problema:

En un trapecio la base mayor excede en 6 cm a la base menor. Si la altura del trapecio mide 8 cm y el área es de 168 cm^2 , ¿cuál es la medida de las bases?



3. Resuelva el siguiente problema:

El producto de las edades de Sofía y su hermana es 176. Si la hermana de Sofía tiene 5 años menos que ella, ¿qué edad tiene cada una?

4. Resuelva el siguiente problema:

La suma de las dos cifras de un número entero es 8. Si el número se disminuye en 10, el resultado es 25. ¿De qué número se trata?



Soluciones

1. La suma de un número negativo y su cuadrado es igual a las tres cuartas partes del número. ¿De qué número se trata?

Sea x el número que se busca.

Para resolver el problema se plantea la ecuación: $x + x^2 = \frac{3}{4}x$

Solución de la ecuación:

$$x + x^2 = \frac{3}{4}x$$

$$x^2 + \frac{x}{4} = 0$$

$$x \left(x + \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{1}{4}$$

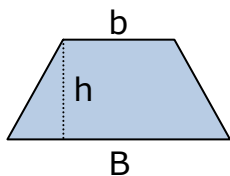
Como el problema trata de un número negativo, se escoge la solución

$$x_2 = -\frac{1}{4}.$$

Respuesta: El número es $-\frac{1}{4}$.



2. En un trapezio la base mayor excede en 6 cm a la base menor. Si la altura del trapezio mide 8 cm y el área es de 168 cm^2 , ¿cuál es la medida de las bases?



El área de un trapezio se determina con la fórmula $A = \frac{(B + b)h}{2}$, donde B es la base mayor, b la menor y h la altura.

Base menor: b

Base mayor: b + 6

Fórmula del área: $A = \frac{(B + b)h}{2}$

Se debe resolver la ecuación $168 = \frac{(b + 6 + b)8}{2}$

$$168 = \frac{(b + 6 + b)8}{2}$$

$$168 = \frac{(2b + 6)8}{2}$$

$$168 = 4(2b + 6)$$

$$168 = 8b + 24$$

$$144 = 8b$$

$$b = 18$$

Como $b = 18$, entonces $B = 18 + 6 = 24$.

Respuesta: La base menor mide 18 cm y la mayor 24 cm.



3. El producto de las edades de Sofía y su hermana es 176. Si la hermana de Sofía tiene 5 años menos que ella, ¿qué edad tiene cada una?

Edad de Sofía: x

Edad de la hermana: $x - 5$

Producto de las edades: $x(x - 5) = 176$

Se debe resolver la ecuación: $x(x - 5) = 176$

$$x(x - 5) = 176$$

$$x^2 - 5x = 176$$

$$x^2 - 5x - 176 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -176$$

$$\Delta = 729$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{729}}{2} = 16 \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{729}}{2} = -11$$

Como se trata de una edad, se toma el valor positivo de x . Por lo tanto:

$$x = 16$$

$$x - 5 = 11$$

Respuesta: Sofía tiene 16 años y su hermana 11 años.



4. La suma de las dos cifras de un número entero es 8. Si el número se disminuye en 10, el resultado es 25. ¿De qué número se trata?

Sean x y y las 2 cifras del número.

Cifra de las unidades del número: x

Cifra de las decenas del número: y

Como el número está formado por x unidades y y decenas, entonces el número es $10y + x$.

La suma de las dos cifras es igual a 8: $x + y = 8$

Si el número se disminuye en 10 da 25: $10y + x - 10 = 25$

Se debe resolver el sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ 10y + x - 10 = 25 \end{cases}$ \Rightarrow $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 10y = 35 \end{cases}$

Para resolver este sistema se puede usar el método de sustitución:

A	Se despeja x de la primera ecuación.	$x + y = 8$ $x = 8 - y$
B	Se sustituye la expresión $x = 8 - y$ en la segunda ecuación.	$x + 10y = 35$ $8 - y + 10y = 35$
C	Se resuelve la ecuación obtenida.	$9y = 27$ $y = \frac{27}{9}$ $y = 3$
D	Se sustituye el valor obtenido para x en la expresión $x = 8 - y$.	$x = 8 - y$ $x = 8 - 3$ $x = 5$
E	Se escribe el conjunto solución.	El sistema tiene solución única. $S = \{(5, 3)\}$

Respuesta: Las cifras del número son 3 y 5. El número es 35.