CONCEPTO DE IDENTIDAD

Ejemplos

1. Determine si la igualdad $(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$ es una identidad.

Solución

Se desarrolla el lado izquierdo de la igualdad. Si resulta una expresión igual a la del miembro derecho, entonces sí es una identidad.

$$\begin{aligned}(x-7)^2 &= (x-7)(x-7)\\ &= x^2 - 7x - 7x + 49\\ &= x^2 - 14x + 49\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$ sí es una identidad.

Para cualquier valor de x la igualdad $(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$ es verdadera, por ejemplo, para $x = 5$.

$$(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$$

$$(5-7)^2 = (-2)^2 \qquad 5^2 - 14 \cdot 5 + 49 = 25 - 70 + 49$$

$$= 4 \qquad = \qquad = 4$$

2. Determine si la igualdad $(x+1)(x-1) - (x-1) = x(x-1)$ es una identidad.

Solución

Se desarrolla cada lado de la igualdad. Si resultan expresiones iguales, entonces sí es una identidad.

Miembro izquierdo	Miembro derecho
$\begin{aligned}(x+1)(x-1)-(x-1) &= x^2 - 1 - x + 1\\ &= x^2 - x\end{aligned}$	$x(x-1) = x^2 - x$

Como las dos expresiones son iguales, $(x+1)(x-1) - (x-1) = x(x-1)$ sí es una identidad.

Para cualquier valor de x la igualdad $(x+1)(x-1)-(x-1)=x(x-1)$ es verdadera, por ejemplo, para $x=3$.

$$(x+1)(x-1)-(x-1)=x(x-1)$$

$$(3+1)(3-1)-(3-1)=4\cdot 2-2 \qquad 3(3-1)=3\cdot 2$$

$$=6 \quad = \quad =6$$

3. Determine si la igualdad $2(t-5)-(5-t)=3(t+5)$ es una identidad.

Solución

Se desarrolla cada lado de la igualdad. Si resultan expresiones iguales, entonces sí es una identidad.

Miembro izquierdo	Miembro derecho
$2(t-5)-(5-t)=2t-10-5+t$ $=3t-15$	$3(t+5)=3t+15$

Como las dos expresiones no son iguales, entonces $2(t-5)-(5-t)=3(t+5)$ no es una identidad.

Por lo tanto, la igualdad $2(t-5)-(5-t)=3(t+5)$ no se cumple para cualquier valor de t. Por ejemplo, para $t=2$.

$$2(t-5)-(5-t)=3(t+5)$$

$$2(2-5)-(5-2)=2\cdot -3-3$$
$$=-6-3$$
$$=-9 \quad \neq \quad 3(2+5)=3\cdot 7 = 21$$

4. Determine el valor de k para que $(x-3)^2+1=x(x+k)+10$ sea una identidad.

Solución

Se desarrolla cada lado de la igualdad:

Miembro izquierdo	Miembro derecho
$\begin{aligned}(x-3)^2+1&=x^2-6x+9+1\\&=x^2-6x+10\end{aligned}$	$x(x+k)+10=x^2+kx+10$

Se igualan las expresiones anteriores para determinar el valor de k:

$$\begin{aligned}x^2-6x+10&=x^2+kx+10\\-6x&=kx\\k&=-6\end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad $(x-3)^2+1=x(x-6)+10$ es una identidad.

Ejercicios

1. Determine si cada igualdad corresponde a una identidad o no.

a) $(x-k)(x+k)-k^2 = x^2 - k^2$

b) $\dfrac{2(x-1)^2}{3}+1=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}$

c) $-(2-x)^2-x=-(x-2)^2-x$

d) $(x-3)^2-1=1-(x-3)^2$

Soluciones

1. Determine si cada igualdad corresponde o no a una identidad:

a) $(x-k)(x+k)-k^2=\boxed{x^2-k^2}$

Se desarrolla el miembro izquierdo de la igualdad y se compara con el miembro derecho. Si resultan expresiones iguales, entonces sí es una identidad.

$$\begin{aligned}(x-k)(x+k)-k^2 &= x^2+kx-kx-k^2-k^2\\ &= \boxed{x^2-2k^2}\end{aligned}$$

≠

Como las dos expresiones son distintas, entonces la igualdad $(x-k)(x+k)-k^2=x^2-k^2$ no es una identidad.

b) $\dfrac{2(x-1)^2}{3}+1=\boxed{\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}}$

Se desarrolla el miembro izquierdo de la igualdad. Si resultan expresiones iguales, entonces sí es una identidad.

$$\begin{aligned}\frac{2(x-1)^2}{3}+1 &= \frac{2(x^2-2x+1)}{3}+1\\ &= \frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}+1\\ &= \boxed{\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

=

Como las dos expresiones son iguales, $\dfrac{2(x-1)^2}{3}+1=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}$ sí es una identidad.

c) $-(2-x)^2 - x = -(x-2)^2 - x$

Se desarrolla cada lado de la igualdad. Si resultan expresiones iguales, entonces sí es una identidad.

Miembro izquierdo	Miembro derecho
$-(2-x)^2 - x = -(4 - 4x + x^2) - x$ $= -4 + 4x - x^2 - x$ $= -x^2 + 3x - 4$	$-(x-2)^2 - x = -(x^2 - 4x + 4) - x$ $= -x^2 + 4x - 4 - x$ $= -x^2 + 3x - 4$

Como las dos expresiones son iguales, $-(2-x)^2 - x = -(x-2)^2 - x$ sí es una identidad.

d) $(x-3)^2 - 1 = 1 - (x-3)^2$

Se desarrolla cada lado de la igualdad. Si resultan expresiones iguales, entonces sí es una identidad.

Miembro izquierdo	Miembro derecho
$(x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 - 1$ $= x^2 - 6x + 8$	$1 - (x-3)^2 = 1 - (x^2 - 6x + 9)$ $= 1 - x^2 + 6x - 9$ $= -x^2 + 6x - 8$

Como las dos expresiones no son iguales, $(x-3)^2 - 1 = 1 - (x-3)^2$ no es una identidad.